Ecole Normale Supérieure de Lyon
Second Concours - Filière Universitaire
Session 2021
Rapport sur l'épreuve orale de Mathématiques

Examinateur : Thomas Budzinski

Déroulé de l'oral

Cette année, 8 candidates et candidats admissibles ont passé l'oral de mathématiques, dont 7 en majeure et 1 en mineure. Les notes vont de 9 à 18, avec une moyenne de 13 et un écart-type de 3. Les statistiques sur un si petit échantillon sur bien sûr très peu significatives.

La durée de l'épreuve orale est de 45 minutes. L'examinateur commence l'épreuve en donnant un exercice et n'intervient pas pendant les dix premières minutes afin de laisser le candidat réfléchir. La suite de l'oral est un dialogue autour de l'exercice avec l'examinateur, qui peut donner des indications ou poser des questions de cours reliées. À une dizaine de minutes de la fin, le premier exercice est interrompu pour en poser un second, portant sur un domaine différent du premier. Ce premier exercice est généralement difficile, et il n'était nullement nécessaire de le résoudre entièrement pour obtenir une excellente note. Le second est plus court et plus standard. La prise d'initiative, la réactivité des candidats et la maîtrise des objets du cours qui apparaissent au cours de la discussion sont des facteurs plus importants dans l'évaluation que l'avancée dans les exercices.

L'épreuve s'est déroulée de manière satisfaisante en ce qui concerne la connaissance du cours, et aucune prestation n'a été catastrophique. Rappelons tout de même que tester de petites valeurs ou des cas particuliers simples est un bon réflexe dès que c'est possible.

Quelques exercices posés au cours de l'oral

Exercices longs

Exercice 1. Soit σ_n une permutation tirée uniformément au hasard dans $\mathfrak{S}_n$. On note A_n le nombre d'indices i entre 1 et n tels que $\sigma(i) < i$. Montrer qu'il existe une constante c (à calculer) telle que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{A_n}{n} - c\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Éléments de solution. Motivés par la ressemblance avec la loi des grands nombres, on décompose A_n comme la somme des variables de Bernoulli X_i, où X_i vaut 1 si $\sigma(i) < i$, et 0 sinon. La difficulté est que les X_i ne sont pas indépendantes. Cependant, on peut tout de même calculer l'espérance et la variance de A_n en développant la somme A_n^2, et conclure en utilisant l'inégalité de Bienaymé–Chebychev. On trouve $c = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. Trouver tous les polynômes P dans $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \geq 1$ et toute matrice M dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$, on ait $\det M > 0$.

Éléments de solution. En testant d'abord le cas $n = 1$, on voit qu'un tel polynôme P ne peut pas avoir de racines négatives. En testant des polynômes de degré 1 ou 2, il semble que cette condition est suffisante. Pour le montrer, on factorise $P(X)$ en $\prod_i (X - \alpha_i) \times \prod_j (X - z_j)(X - \bar{z}_j)$ où $\alpha_i > 0$ et $z_j \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Si $P(M) = 0$, alors les valeurs propres complexes de M sont soit parmi les $\alpha_i > 0$, soit parmi les z_j et $\bar{z}_j$. Comme $\det M$ est le produit des valeurs propres complexes (comptées avec multiplicité), il suffit de montrer que z_j a la même multiplicité que $\bar{z}_j$, ce qu'on peut déduire du fait que le polynôme caractéristique de M est réel.

Exercices courts

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f'(x) + f(x)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

Éléments de solution. On pose $g(x) = f'(x) + f(x)$ et on utilise la méthode de variation de la constante pour exprimer f en fonction de g.

Exercice 4. Quelles sont les matrices orthogonales à coefficients positifs ?

Éléments de solution. Les colonnes doivent être orthogonales, donc il ne peut pas y avoir deux termes non nuls dans la même ligne. On en déduit que les termes non nuls valent 1, puis que seules les matrices de permutation conviennent.