Banque BCPST Inter-ENS/ENPC - Session 2021
RAPPORT SUR L'ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES

École concernée : ENPC
Coefficient (en pourcentage du total d'admission) : 20%
2 MEMBRES DU JURY : Anne-Sophie Guinotte et Mehdi Zine

Déroulement de l'épreuve

L'épreuve d'Oral de Mathématiques de l'école des Ponts concours BCPST dure 50 minutes précédée de 15 minutes de préparation. Elle consiste en deux exercices permettant de balayer une vaste partie du programme de mathématiques des 2 années de classe préparatoire. Elle ne comporte pas d'informatique. Quelle qu'ait été la préparation du candidat, les deux exercices seront abordés pendant l'oral, permettant ainsi au jury de juger aussi le candidat sur sa réactivité face à des questions nouvelles auxquelles il n'aura pas eu le temps de réfléchir pendant les 15 minutes de préparation.

On attend du candidat qu'il sache traiter d'emblée des questions classiques. En revanche il est légitime sur des questions plus difficiles qu'il soit amené à réfléchir et à proposer des pistes qui n'aboutiront pas, du moment qu'elles sont cohérentes et justifiées par rapport à l'exercice, et démontrent à la fois une bonne connaissance du cours et un esprit d'initiative. Le jury rappelle que son rôle est d'évaluer afin de classer, ce qui l'amène à interroger les candidats. Cet oral n'est pas un « écrit au tableau » mais bien un dialogue pertinent sur les mathématiques.

Remarques du jury

Algèbre :
Le cours sur la réduction est globalement su et maîtrisé.
En revanche, les candidats ont des difficultés à manier les complexes.

Analyse :
Les candidats sont peu à l'aise avec l'utilisation des valeurs absolues.
Trop de confusions dans l'application du critère de comparaison pour les séries ou intégrales impropres : les candidats ont tendance à écrire directement des inégalités de sommes partielles ou d'intégrales (totalement inutiles) sans montrer justement au préalable leur convergence !

Probabilités :
Il faut connaître les définitions des objets manipulés : variable aléatoire, événement.
Ne pas confondre événement et probabilité de cet événement.
Être méthodique dans la mise en place des exercices de probabilités (par exemple, penser à donner le support d'une variable aléatoire même s'il n'est pas explicitement demandé).

De manière générale, les étudiants sont bien préparés, ont une attitude correcte. Le tableau est bien organisé.

Deux exemples de sujets sont donnés à la suite de ce rapport.

Sujet 2b

Vous commencerez obligatoirement par exposer le premier exercice.

Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.
   (b) On suppose que la série de terme général $P(X>n)$ est convergente et on note S sa somme. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \leqslant S$ et en déduire que X possède une espérance.
   (c) On suppose que X possède une espérance.
      i. Établir l'existence de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)$ et montrer que :
      $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k) \geqslant nP(X>n)$.
      ii. En déduire alors que la série de terme général $P(X>n)$ converge et que :
      $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.
   (d) En déduire que X possède une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X>n)$ converge et que, dans ce cas, on a : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.
2. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité une fonction f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0. On note S la fonction définie par : $t \mapsto P(X>t)$.
   (a) Montrer que : $\forall A>0, \displaystyle\int_0^A S(t)\mathrm{d}t = AS(A) + \int_0^A tf(t)\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que si X admet une espérance alors : $\forall A>0,\ AS(A) \leqslant \displaystyle\int_A^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$ est convergente et qu'elle est égale à $E(X)$.
   (c) Montrer, réciproquement, que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$ est convergente alors X admet une espérance et que : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2

X suit la loi $\mathcal{N}(0,4)$ ($m=0$ et $\sigma^2=4$). Soit $M = \begin{pmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{pmatrix}$.
Calculer la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes.

Sujet 9

Vous commencerez obligatoirement par exposer le premier exercice.

Exercice 1

1. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $(1+x^2)y' - nxy = 0 \qquad (1)$

   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $(1+x^2)y' - nxy = \lambda y \qquad (2)$

2. Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\varphi(P) = (1+X^2)P' - nXP$$

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Écrire la matrice Φ de φ dans la base canonique.

   (c) Déterminer le noyau de φ ? L'application est-elle un automorphisme ?

4. Quelles sont les valeurs propres de φ ?

Exercice 2

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(2)} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   est une fonction de répartition.

   Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour fonction de répartition F.

2. Déterminer une densité de X, et son espérance si elle existe.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1[$. Calculer $P\left(k \leqslant \dfrac{1}{X} \leqslant k+t\right)$.

   (b) Soit $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.
   Montrer que Y est une variable aléatoire de même loi que X.