

# Banque MP Inter-ENS - Session 2021

## Rapport sur l'épreuve de TIPE de mathématiques.

Ecoles concernées : ENS (Paris) - ENS de Lyon - ENS de Paris-Saclay - ENS de Rennes

Coefficients (en pourcentage du total d'admission):

Concours MP/MPI :

- ENS de Paris-Saclay : 3.8%
- ENS de Lyon : 5.4%
- ENS (Paris) : 7.4%
- ENS de Rennes : 3.8%

Concours Info :

- ENS de Paris-Saclay : 7.9%
- ENS de Lyon : 5.6%
- ENS (Paris) : 3.3%
- ENS de Rennes : 11.4%

**Membres du Jury:** H. Guenancia, J.-M. Mirebeau, H. Zaag, O. Zindy.

### Déroulement de l'épreuve

L'épreuve de TIPE est commune aux quatre ENS. Le candidat dépose, lors de son inscription au concours, un rapport sous la forme d'un unique fichier PDF présentant son travail, et précise quelle en est la discipline dominante (mathématiques, informatique, physique). Une discipline secondaire peut également être mentionnée. Le rapport, de cinq pages en principe auxquelles s'ajoutent une bibliographie et d'éventuelles figures, décrit la problématique que le candidat a choisi d'étudier, les outils qu'il a utilisés et les réponses qu'il a apportées ; ce rapport doit naturellement être l'oeuvre du candidat et non la reproduction d'un ouvrage. Cependant, ce rapport n'est pas évalué en tant que tel : il constitue le support sur lequel s'appuiera l'épreuve orale. Il n'a pas pour vocation d'être encyclopédique ni de décrire toutes les connaissances de son auteur dans un domaine donné : il est donc inutile, même nuisible, de présenter des textes très longs que les examinateurs ne pourront pas étudier correctement, ou d'y adjoindre des annexes pléthoriques. À plus forte raison les pièces supplémentaires présentées le jour de l'épreuve ne seront pas prises en considération.

L'oral proprement dit dure 40 minutes. Le candidat est tout d'abord invité à présenter son travail, en abordant rapidement le contenu mathématique. Le choix est laissé au candidat de présenter son travail sur transparents ou au tableau. Ces transparents doivent être sous la forme d'un fichier PDF, placé sur une clé USB, et ils seront projetés via un vidéo-projecteur (pour des raisons d'évolution technique, les rétro-projecteurs ne sont plus mis à disposition des candidats). Le candidat peut s'appuyer sur son rapport que le jury a sous les yeux lors

de l'épreuve. *Cet exposé d'introduction sert à entrer dans le vif du sujet, le jury l'interrompt rapidement pour vérifier la compréhension des concepts utilisés en posant des questions plus précises ou en proposant des exercices courts en rapport avec le sujet traité.*

Le candidat ne doit pas s'inquiéter de n'avoir eu le temps de présenter, à la fin de l'épreuve, qu'une petite partie du plan prévu, ni du fait que le jury ait concentré ses questions sur un point particulier. On ne doit pas non plus être gêné par le fait que les examinateurs posent beaucoup d'exercices ou que leur rapport avec le sujet ne soit pas immédiatement évident (il peut ne se dégager que progressivement).

### **Critères d'évaluation**

*L'épreuve de TIPE de mathématiques est, avant tout, une épreuve de mathématiques. Le premier critère d'évaluation est donc la bonne maîtrise du contenu mathématique de l'étude et bien entendu de celle du programme de MP.*

Bien que comportant une partie écrite (le rapport) qui se doit d'avoir un contenu mathématique sérieux, le TIPE de mathématiques est une épreuve orale et c'est donc principalement la discussion entre le candidat et le jury qui est prise en compte dans la note finale.

Les sujets pluridisciplinaires sont les bienvenus, tout comme les considérations d'ordre empirique et expérimental, ou les implémentations informatiques, mais le candidat doit être à même de les relier à une analyse mathématique. Le jury souhaite trouver, notamment, des énoncés mathématiques précis sur lesquels il pourra asseoir ses questions. Le soin apporté à d'autres éléments du rapport ne peut en aucun cas remédier à l'insuffisance de contenu mathématique que nous avons constatée dans certains travaux. En particulier, nous attirons l'attention du candidat sur l'importance du choix de la discipline dans laquelle il présentera son TIPE (mathématiques, informatique ou physique) et qui conditionne le jury qui l'écouterà : un TIPE centré sur la programmation informatique d'un algorithme de résolution (type Rubik's cube) aurait peut-être été plus avantageusement présenté en informatique. Les jurys ne sont pas mixtes et *le jury de mathématiques n'a pas vocation à tester les programmes informatiques.*

### **Compétences attendues**

L'épreuve de TIPE a la particularité de permettre au candidat de choisir le thème sur lequel il sera interrogé. En contrepartie, le jury attend de sa part une bonne compréhension de ce sujet et des outils mathématiques employés pour le traiter. Il va de soi qu'on ne suppose du candidat a priori aucune connaissance au-delà du programme des classes préparatoires, et nous lui conseillons de rester autant que possible dans ce cadre, ne s'en écartant que si cela est nécessaire au sujet choisi. Nous pensons de façon générale qu'il est possible de trouver des thèmes riches et originaux sans s'éloigner beaucoup du programme. En revanche, la maîtrise des concepts avec lesquels on prétend avoir travaillé est indispensable. Les candidats présentant un sujet de probabilités doivent savoir présenter rigoureusement le formalisme au programme (univers, événement, variable aléatoire) sur un exemple de base, comme le lancer de deux dés.

La composante "initiative personnelle" en mathématique est peut-être plus difficile à cerner qu'en informatique ou en physique. Certains candidats se sentent ainsi obligés de délivrer un programme informatique en annexe que le jury n'a pas vocation à tester. *L'initiative personnelle doit correspondre à un questionnement du candidat tout au long de la préparation de son TIPE en mathématiques* : pour chaque résultat introduit on doit être capable de fournir un exemple ou un contre-exemple, vérifier son application dans un cas simple, justifier de la nécessité de toutes les hypothèses, évaluer la "force" du résultat...

S'agissant d'un théorème, le candidat doit être capable, si on le lui demande, de faire la démonstration si celle-ci est simple ou d'exposer les idées-clés sans entrer dans les détails, et d'indiquer en quoi les hypothèses sont nécessaires. Il n'est bien sûr pas défendu d'admettre

une démonstration, mais celle-ci doit être indiquée comme telle dans le rapport, et l'on veillera néanmoins à donner un énoncé précis du résultat en question. Nous mettons spécialement en garde les candidats contre la tentation d'aborder des sujets trop ambitieux et par conséquent mal maîtrisés, ou encore de choisir un domaine mathématique vaste (comme la topologie algébrique ou l'analyse complexe), et de présenter un rapport qui n'est qu'une compilation de théorèmes sans initiative personnelle et sur laquelle on n'aura aucun recul.

Le jury rappelle qu'il est attendu du TIPE qu'il contienne des mathématiques et notamment des preuves, ou pour le moins des éléments conséquents de preuve. Une succession de définitions et résultats donnés sans preuve ne peut constituer en aucun cas un rapport satisfaisant.

Le candidat a la possibilité d'apporter des notes personnelles, et de les consulter à sa guise en cas de doute sur une formule ou un énoncé, mais il doit également savoir s'en détacher dans le cadre du dialogue avec le jury, et éviter de les garder à la main de façon continue.

### **Thèmes choisis**

Le thème de l'année était "Enjeux sociétaux", pouvant être décliné sur les champs suivants: environnement, sécurité, énergie. *Le jury de mathématiques est conscient de la difficulté de suivre le thème imposé chaque année et n'accorde que peu d'importance au lien avec le TIPE du candidat.* À titre d'exemple, voici quelques-uns des thèmes les plus fréquents dans lesquels s'inscrivent les sujets que nous avons rencontrés cette année :

- Analyse complexe : fonctions zêta et de Dirichlet, uniformisation des surfaces de Riemann
- Arithmétique : nombres  $p$ -adiques et applications (théorème de Hasse-Minkowski, théorème de Dwork sur la rationalité des fonctions zêta), théorème AKS, théorème des nombres premiers, théorème de la progression arithmétique de Dirichlet
- Arithmétique et cryptographie : algorithme LLL et réseaux euclidiens, cryptographie sur courbes elliptiques, codes correcteurs, corps finis, groupe de tresses, entropie de Shannon
- Etudes d'équations différentielles : équations de Lotka-Volterra, système SI/SIS/SIR, théorème de Poincaré-Bendixson.
- Fractales et dimension de Hausdorff
- Probabilités : chaînes de Markov, marches aléatoires et analyse harmonique sur les groupes finis, nombres normaux, percolation, processus de Galton-Watson, mouvement Brownien, graphes aléatoires, permutations aléatoires, entropie et théorie de l'information
- Systèmes de vote, scrutin, élection, Condorcet, etc
- Systèmes dynamiques : fonction logistique, chaos
- Théorie des corps : corps finis, clôture algébrique, théorie de Galois et constructions à la règle et au compas.
- Théorie des graphes : percolation sur les graphes infinis, graphes aléatoires, graphes hamiltoniens
- Théorie des groupes : marches aléatoires sur les groupes finis, groupes de tresses, représentation des groupes finis
- Topologie algébrique : groupe fondamental, théorème de Brouwer, théorie des noeuds.

### Remarques sur la forme

Le jury a été, dans l'ensemble, plutôt satisfait des différents rapports. C'est le signe que l'épreuve est prise au sérieux et travaillée pendant la période (pourtant chargée) de la prépa.

#### \* *Rapport et présentation*

Nous avons observé une grande hétérogénéité sur la qualité des rapports reçus. Certains sont rédigés avec un grand soin et une attention particulière à la fois au détail et à la cohérence de l'ensemble alors que d'autres contiennent un nombre alarmant de fautes d'orthographe, n'ont pas de bibliographie, et donnent l'impression d'être une succession de résultats bruts sans transition ou contexte. Mieux vaut un rapport court, bien structuré et perfectionné qu'un rapport long, désorganisé et truffé d'erreurs ou typos.

La même remarque s'applique aux présentations. Trop de candidats arrivent sans l'avoir préparée (ou presque) et proposent alors un exposé décousu, ponctué de blancs. Qu'elle soit faite au tableau ou à l'aide de transparents, la présentation doit être bien réfléchie et démontrer la hauteur de vue du candidat sur le sujet. Certains candidats ont souhaité projeter leur rapport pour s'en servir comme présentation. Nous déconseillons fortement ce choix car il en résulte un document peu lisible et qui se prête fort mal à la présentation. Par ailleurs chaque membre du jury dispose déjà de ce document sur son propre écran, ce qui rend la projection inutile.

Nous devons insister sur la différence entre le *rapport* (obligatoire) qui est à téléverser sur le site du concours, et le *diaporama* (facultatif, l'alternative étant d'utiliser le tableau, ce qui est tout aussi valable) qui peut être projeté le jour de l'oral. Le rapport doit être rédigé dans un style soigné, fait de phrases complètes, et organisé en sections, paragraphes, énoncés... Un style plus abrégé est possible pour l'éventuel diaporama, qui est destiné à servir de support à l'exposé oral. Nous recommandons aux candidats d'apporter une copie papier de leur rapport le jour de l'épreuve, ainsi que les notes personnelles qui pourraient leur être utiles, qu'ils pourront étaler sur le bureau mis à disposition et consulter à loisir. (Le jury demande en revanche de ne pas garder ces documents à la main, car le candidat est alors tenté de garder les yeux rivés dessus, ce qui nuit à la qualité de l'échange.)

Beaucoup de candidats choisissent de présenter au tableau, et il en résulte souvent un bon exposé. Presque personne n'oublie d'effacer le tableau, ce qui est remarquable par rapport aux années précédentes.

#### \* *Thématiques particulières*

Quelques sujets récurrents en algèbre ont été mal maîtrisés car les objets fondamentaux sous-jacents ne sont pas bien compris. Citons notamment le groupe de tresses (quasiment aucun candidat n'a été en mesure d'écrire rigoureusement la définition de ce dernier) et la notion de corps de rupture/décomposition, ou encore le volume d'un réseau euclidien.

En ce qui concerne les candidats ayant choisi un sujet d'analyse, le jury a observé que les prestations étaient plutôt décevantes dans l'ensemble, entre autres, car les étudiants confondent la solution du modèle continu avec son approximation discrète et peinent à formaliser la convergence du discret vers le continu. Par ailleurs, nous avons observé que le calcul différentiel à plusieurs variables (du programme de CPGE) était rarement maîtrisé par les candidats dont le TIPE reposait en partie dessus, et que les candidats arrivaient rarement à écrire soigneusement l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Il y a beaucoup de sujets qui utilisent la théorie des probabilités, à titre principal ou bien secondaire. Malheureusement, le jury a constaté que trop souvent, les candidats manquaient de rigueur et avaient du mal à donner des énoncés ou même des définitions précises concernant

des notions (hors-programme des CPGE) introduites dans le TIPE et manipulées au cours de la présentation. Mentionnons certaines notions qui ont porté à confusion et sont fréquemment revenues : l'espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire, les chaînes de Markov à temps et/ou espace d'états continus, le mouvement Brownien. Par ailleurs, le jury fut surpris qu'un certain nombre de candidats optent pour un sujet dont le thème principal est la théorie des probabilités alors que les exercices posés font clairement paraître que le contenu du programme des CPGE n'est pas maîtrisé.

*\* Remarques finales*

Certains candidats ont présenté un travail commun sur un sujet. C'est tout à fait possible et même bénéfique pour le travail au cours de l'année scolaire. Le jury apprécie que, dans un tel cas, le candidat le mentionne. Il sera dans tous les cas évalué sur sa compréhension personnelle du sujet présenté. Naturellement, on attend de lui qu'il mette l'accent sur sa contribution propre plutôt que sur celle des autres membres de l'équipe. Il n'est pas acceptable que lors des questions du jury sur un point du rapport ou de la présentation, le candidat déclare qu'il n'a pas traité cette partie là personnellement. Si le cas venait à se produire, il est préférable que le candidat dise en amont qu'il cite le travail d'un autre membre de l'équipe mais qu'il n'a pas approfondi celui-ci. *Nous rappelons qu'il est interdit que des candidats différents présentent le même rapport.*

Pour finir, nous tenons à remercier ceux qui, par le recul qu'ils ont pris sur la question qu'ils étudiaient, le niveau de leur travail et la qualité de leur exposé, nous ont donné l'occasion d'avoir un échange d'un réel intérêt scientifique.