RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE D'INFORMATIQUE-MATHÉMATIQUES
FILIÈRE MP – CONCOURS INFO – SESSION 2021
ÉCOLES CONCERNÉES : ENS DE LYON, ENS DE PARIS, ENS DE PARIS SACLAY, ENS DE RENNES

Coefficients de l'épreuve (en pourcentage du total d'admission) :

LYON	**11,3%**
PARIS	**13,3%**
PARIS SACLAY	**13,2%**
RENNES	**8,6%**

MEMBRES DE JURY : F. CAPELLI & N. FRANCIS & M. JEANMOUGIN

L'épreuve écrite d'informatique-mathématiques concerne les candidates et candidats aux quatre Écoles Normales Supérieures sur le concours INFO. Le nombre de candidats ayant composé était de 316 pour la session 2021 (pour 440 inscrits), contre 415 pour 505 en 2020, soit une proportion d'absents beaucoup plus importante. Les notes se sont échelonnées de 0 à 20 avec une moyenne de 8,6 et un écart-type de 4,0.

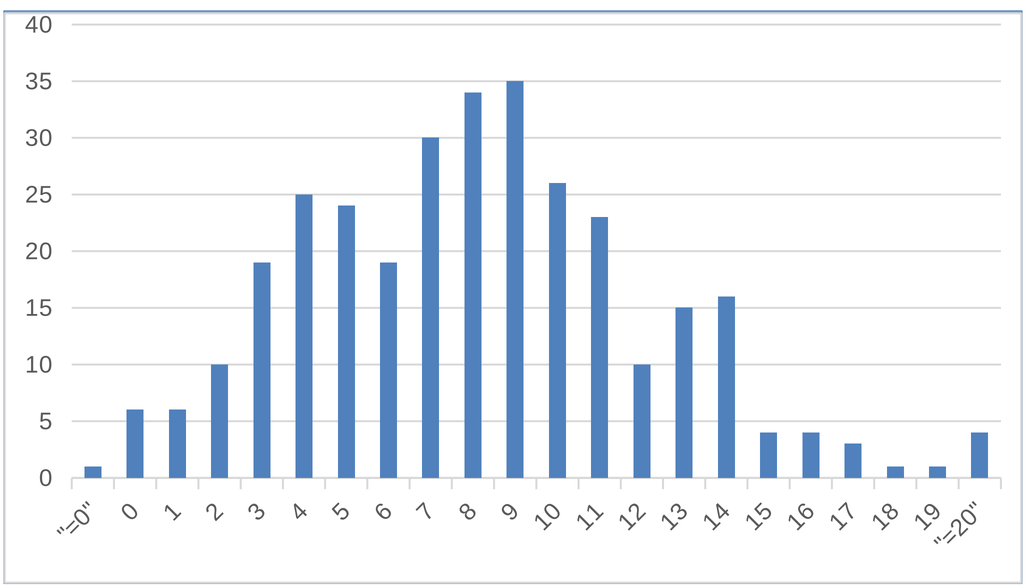

FIGURE 1 – Nombre de copies dans $[n; n+1[$.

1 L'épreuve

Afin de comparer la réussite à des questions indépendamment de leurs poids respectifs, les moyennes et écart-type par question sont données sur 1.

Le sujet 2021 portait sur les diagrammes de décision, des structures de données permettant de représenter les fonctions Booléennes.

— La partie I contient des questions de cours sur les fonctions Booléennes.

— La partie II contient la définition des diagres de décisions binaires ordonnées (DDBO) et des arbres de décisions binaires ordonnées (ADBO) ainsi que des exercices permettant de découvrir ces définitions.

— La partie III traite du lien entre ces structures de données et les automates d'états finis.

— La partie IV contient des questions pour comprendre la structure des DDBO.

— La partie V traite de bornes inférieures : on y étudie une famille de fonctions booléennes qui ne peut pas être représentée par des DDBO de tailles polynomiale.

— La partie VI introduit des généralisations des DDBO et on y prouve des bornes inférieures plus forte qu'à la partie V.

2 Commentaires généraux

Le jury déplore le peu de soin apporté à la rédaction de nombreuses candidates et candidats. Le jury tient à rappeler que cette épreuve est une épreuve de mathématiques-informatique et que des rédactions de qualité similaire à une épreuve de mathématiques sont attendues.

Le sujet étudiait des structures de données pour représenter les fonctions Booléennes. Les diagrammes de décision binaire ordonnés (DDBO) présentent certaines similarités avec les automates d'états finis. Beaucoup de candidates et candidats ont utilisé cette intuition dans leurs preuves. Cependant, le jury regrette que cela ait mené les candidats à ignorer des aspects importants des définitions et à ignorer certaines difficultés. Le jury s'attend à ce que les candidats répondent aux questions en utilisant les définitions formelles et les éléments du sujet. Même si certaines choses peuvent paraître évidentes, il convient au moins de le remarquer. Par exemple, les candidats ont souvent utilisé le fait qu'il existe un unique chemin de la racine à un puits compatible avec une assignation de variables données dans un DDBO. Si cela est vrai, cela ne relève pas des définitions, et le jury s'attend a minima à une justification rapide de ce fait. Cette intuition d'ailleurs faisait défaut à la question IV.2.b qu'aucun candidat n'a réussi : contrairement à un automate, un DDBO peut ne pas tester certaines variables. Aucun candidat n'a tenu compte de cela et toutes les réponses qui ont été données étaient fausses.

3 Commentaires détaillés

Ci-dessous nous donnons pour chaque question le nombre de points associés, puis :

— le nombre de copies ayant reçu des points pour cette question (c'est à dire le nombre de copies où la question a été traitée et non nulle) ;

— la moyenne **sur 1** de toutes les copies ayant traité la question ;

— l'écart-type **sur 1** de toutes les copies ayant traité la question.

Pour chaque partie, on donne le nombre total de points qui pouvaient être obtenus, puis la moyenne et l'écart type des points obtenus.

Partie I (2pts | moy 1,8 stdev 0,9)

▷ **Question I.1.a. [0,4 pt | 270 / 0,9 / 0,3]** Cette question d'ouverture ne présentait pas de difficulté particulière et a été globalement bien traitée. Les candidats proposant des tables de vérités « originales » (lignes dans le désordre, points de suspension...) n'ont pas été sanctionnés dès lors qu'il n'y avait pas d'ambiguïté, qu'une colonne par variable et une colonne pour la formule étaient présentes, que toutes les combinaisons étaient présentes (et le résultat juste). Le jury recommande cependant aux candidats de présenter leurs tables de vérités en pensant aux correcteurs, et donc de la manière la plus canonique possible.

▷ **Question I.1.b. [0,2 pt | 267 / 0,8 / 0,4]** Une formulation explicite des cinq solutions était attendue ici, évitant donc de paraphraser la formule elle-même. Une solution fausse mais cohérente avec la question précédente apportait la moitié des points.

▷ **Question I.2. [0,5 pt | 225 / 0,7 / 0,4]** Si la plupart des candidats ont énoncé une formule correcte, moins ont pensé à justifier leur réponse, même brièvement.

▷ **Question I.3.a. [0,5 pt | 196 / 0,7 / 0,4]** Même remarque que pour la question précédente.

▷ **Question I.3.b. [0,4 pt | 198 / 0,8 / 0,4]** Le jury attendait ici une justification rapide se basant sur la formule proposée par le candidat à la question précédente. Les deux interprétations possibles de l'énoncé (combien de fois chaque variable peut-elle être présente, ou combien de variables trouve-t-on dans la formule en tout), étaient acceptées.

Partie II (6,1pts | moy 4,8 stdev 2,1)

▷ **Question II.1. [0,4 pt | 311 / 0,9 / 0,2]** Pas de commentaire particulier sur cette question qui visait à vérifier la bonne compréhension des définitions.

▷ **Question II.2.a. [0,2 pt | 287 / 0,9 / 0,3]** Le jury attendait simplement que le candidat donne l'ordre adéquat, sans justification particulière.

▷ **Question II.2.b. [0,4 pt | 266 / 0,8 / 0,4]** Cette question visait à tester la bonne lecture du DDBO et à attirer l'attention des candidats sur le fait que certains chemins peuvent ne pas tester toutes les variables. L'erreur la plus fréquente était le mauvais traitement du chemin qui ne teste pas x_3.

▷ **Question II.2.c. [0,5 pt | 226 / 0,8 / 0,4]** Le jury attendait un π-DDBO utilisant le même ordre π que l'ADBO de départ. Il s'agissait de remarquer que les DDBO peuvent être plus succints que les ADBO, en groupant les sommets ayant un comportement identique, en vue de préparer à la question II.5.

▷ **Question II.3. [0,7 pt | 227 / 0,7 / 0,4]** Un DDBO correct sans justification suffisait à marquer tous les points. Le jury regrette la quantité importante de candidats qui se sont obstinés à dessiner un ADBO malgré la grande taille et le manque de lisibilité du diagramme final. Un ADBO correct marquait bien sûr la totalité des points, mais sur un diagramme peu lisible, les erreurs d'inattention sont fréquentes.

▷ **Question II.4. [1,4 pt | 180 / 0,5 / 0,4]** Une rédaction précise et formelle était attendue pour cette question. Beaucoup de candidats se sont contentés de présenter uniquement leurs intuitions et ont été fortement sanctionnés.

L'argument le plus simple consistait à construire l'ADBO recherché par récurrence sur le nombre de variables de f, en plaçant pour l'étape d'hérédité les deux sous-arbres obtenus par l'hypothèse de récurrence sous une nouvelle racine testant la première variable. Les candidats qui se sont orientés vers cette solution ont généralement marqué tous les points.

Certains candidats ont tenté de réaliser l'étape d'hérédité en complètement l'ADBO par les feuilles plutôt que par la racine. Cette approche-là était beaucoup plus délicate à mener à bien, car nécessitant une hypothèse de récurrence très précise sur la forme de l'ADBO produit. La simple existence d'un arbre représentant la restriction de f à ses $n-1$ premières variables n'était pas une base suffisante pour contruire un ADBO pour f sans hypothèse supplémentaire notamment sur le fait que chaque chemin dans l'ADBO teste bien toutes les variables. Peu de candidats qui ont choisi cette approche sont parvenus à mener la preuve à bien.

Finalement, certains candidats ont tenté de construire l'ADBO demandé par induction sur la structure d'une formule logique représenant f. Ces tentatives ont généralement été infructeuses, les candidats n'ayant pas pu garantir le respect de l'ordre des variables le long des branches de l'arbre.

▷ **Question II.5.a. [0,4 pt | 215 / 0,7 / 0,4]** Un ADBO correct sans justification suffisait à marquer tous les points. Attention, l'énoncé demandait bien un ADBO, et non un DDBO.

▷ **Question II.5.b. [0,9 pt | 181 / 0,6 / 0,4]** Une rédaction formelle était attendue pour cette question. L'argument intuitif consistant à dire qu'une variable non testée sur une branche peut être changée sans affecter le résultat est certes correct, mais ne constitue pas une preuve.

Un raisonnement par l'absurde correct demandait de quantifier précisément le chemin P, l'existence d'une variable x n'apparaissant pas dans les étiquettes des sommets de P, et finalement d'exhiber deux assignations compatibles avec P et de parités différentes. Les candidats n'ayant pas fait le lien avec P ou bien n'ayant pas exhibé clairement la contradiction ont été fortement sanctionnés.

Finalement, bon nombre de candidats se sont laissés piéger par leurs intuitions sur les automates : un chemin de la racine à un sommet terminal dans un ADBO n'est pas nécessairement acceptant. Ainsi, on ne pouvait pas supposer ici que P fixait un nombre pair de variables à 1.

▷ **Question II.5.c. [0,7 pt | 153 / 0,5 / 0,4]** L'argument le plus simple consistait à montrer que tout ADBO représentant PARITÉ est un arbre binaire strict (par définition) parfait et de hauteur $|X|$ (d'après la question précédente). Tous les arguments étaient nécessaires pour conclure, et un grand nombre de candidats a oublié de mentionner l'un ou l'autre.

Certaines copies ont tenté de faire le lien entre le nombre d'assignations possibles des variables et la taille de l'ADBO avec plus ou moins de succès. Les candidats qui ont mené a bien cette approche sont parvenus à exhiber une bijection etre les assignations possibles et les branches de l'arbre, ce qui a été particulièrement apprécié par le jury.

Finalement, bon nombre de candidats ont tenté de prouver le résultat par récurrence. Cette approche tentante était malheureusement très périlleuse, soit parce que l'hypothèse de récurrence n'était pas suffisante (car ne faisant pas d'hypothèse sur les sous-arbres d'un ADBO représentant PARITÉ, qui ne sont en particulier pas eux-mêmes des ADBO représentant PARITÉ), soit parce qu'elle prouvait une borne supérieure plutôt qu'une borne inférieure, en exhibant une manière de construire un ADBO de la bonne taille, sans pouvoir conclure qu'il est minimal.

▷ **Question II.5.d. [0,5 pt | 150 / 0,7 / 0,4]** Un dessin correct d'un cas particulier appuyé d'une explication sur la manière de l'étendre au cas général suffisait à marquer tous les points.

Partie III (9,7pts | moy 3,6 stdev 2,7)

▷ **Question III.1.a. [0,5 pt | 169 / 0,5 / 0,5]** Un automate correct donné sans justification suffisait à marquer tous les points. Attention, l'énoncé demandait bien un automate déterministe.

▷ **Question III.1.b. [0,7 pt | 187 / 0,6 / 0,4]** Un dessin correct suffisait à marquer tous les points. La question demandait un DDBO. Les candidats qui ont donné un ADBO correct ont bien sûr marqué tous les points, mais comme pour la question II.3, la taille du diagramme était malheureusement source d'erreurs.

▷ **Question III.2.a. [0,4 pt | 226 / 0,8 / 0,3]** Une explication de la manière de construire le DDBO demandé accompagné d'une illustration suffisait à marquer tous les points. Il fallait notamment prendre garde à bien distinguer le cas où n est impair du cas plus naturel où n est pair.

▷ **Question III.2.b. [0,9 pt | 169 / 0,7 / 0,4]** Les candidats qui ont utilisé l'indication pour montrer qu'un automate reconnaissant le langage donné a nécessairement un nombre infini d'états sont en général parvenus à mener la preuve à bien.

Le jury a accepté l'utilisation du lemme de l'étoile bien qu'il ne fasse pas partie du programme, **sous réserve** qu'il soit correctement énoncé et appliqué. Toutefois, l'étude des différents cas où peut apparaître la boucle de l'automate conduisait à une preuve bien plus délicate que celle suggérée par l'indication.

Les candidats qui ont choisi de refaire directement la preuve du lemme de l'étoile sur le langage donné l'ont en général bien fait et ont marqué tous les points.

▷ **Question III.3.a. [0,5 pt | 189 / 0,6 / 0,3]** La question demandait de modifier A d'une part en supprimant les états inaccessibles, et d'autre part en rassemblant tous les puits en un seul, en modifiant les transitions depuis et vers ces puits en conséquence. Le jury attendait un argument ou au moins une remarque expliquant pourquoi ces deux opérations ne changent pas le langage reconnu par l'automate.

Le jury a accepté des explications informelles tant que la construction présentée par le candidat ne laissait pas d'ambiguïtés sur le devenir des transitions depuis et vers les états modifiés. Il était tout de même préférable de donner explicitement la définition des différents constituants de l'automate final.

Les candidats qui ont affirmé sans preuve qu'il suffit d'émonder l'automate n'ont pas marqué de points : d'une part, l'automate émondé ne figure pas au programme, d'autre part l'automate émondé défini traditionnellement n'est pas un automate complet.

▷ **Question III.3.b. [1,1 pt | 208 / 0,7 / 0,3]** La définition de *boucle* contenait une légère erreur : un état accessible q qui n'est pas un puits contient une boucle s'il existe un mot $w \in \Sigma^+$ (et non Σ^*) tel que $q = \delta^*(q, w)$. Les candidats qui n'ont pas remarqué l'erreur n'ont bien sûr pas été pénalisés, mais le jury a toutefois apprécié les copies qui prenaient soin de relever le problème.

L'énoncé demandait de prouver une équivalence. Beaucoup de copies ont oublié ou à peine esquissé l'un ou l'autre des deux sens.

Finalement, les raisonnements s'intéressant uniquement au graphe sous-jacent de l'automate ne permettaient pas de conclure : en effet, il était possible que le graphe contienne des cycles sur des parties non-accessibles ou non-co-accessibles. Il était crucial ici de bien exploiter le caractère accessible et non puits de l'état considéré comme témoin de la boucle.

▷ **Question III.4.a. [2,2 pt | 62 / 0,5 / 0,4]** La construction de l'automate pour cette question était assez délicate et les candidats qui se sont contentés de décrire informellement l'idée générale n'ont pas su se montrer suffisamment convainquants. Le jury attendait que les candidats soient très précis sur la définition des différents constituants de l'automate, dont en particulier : l'ensemble des états (pour justifier la taille de l'automate), l'unique état initial, l'unique état puits et le choix des états acceptants.

Certains candidats ont choisi de construire l'automate demandé comme un produit entre l'automate A et un automate déterministe et complet reconnaissant le langage des mots de longueur n. Cette approche est correcte, mais requiert ensuite d'invoquer la question III.3.a pour éliminer les états non-accessibles et ne conserver qu'un seul puits. La justification de la taille de cette construction s'avérait ensuite plus délicate que pour une construction directe, mais a été généralement bien faite.

Finalement certains candidats ont tenté de supprimer les boucles de l'automate de départ afin de pouvoir raisonner sur la longueur des chemins depuis l'état initial. Cette tentative assez périlleuse n'a jamais été menée correctement.

▷ **Question III.4.b. [0,7 pt | 62 / 0,5 / 0,3]** Pour cette question, il suffisait de faire le lien entre l'automate de la question III.4.a et un DDBO représentant f_n. Les justifications importantes attendues par le jury pour que cette correspondance soit correcte incluaient : le choix des étiquettes des sommets et des arêtes ; le respect de l'ordre Id_n imposé pour le DDBO ; le choix des sommets terminaux ; la justification de la taille.

La justification du respect de l'ordre provenait simplement de la propriété supplémentaire imposée par la question III.4.a, mais la plupart des candidats ont malheureusement omis de le remarquer.

$\triangleright$ **Question III.5. [2,7 pt | 29 / 0,4 / 0,3]** Peu de candidats se sont risqués à essayer cette question difficile qui visait à faire le lien entre les automates reconnaissant des langages sur un alphabet fini quelconque, et les diagrammes de décision représentant des ensembles d'assignations interprétées comme des mots sur l'alphabet $\{0,1\}$.

La partie difficile de la question consistait à montrer que L' est bien régulier. La plupart des candidats qui ont essayé de résoudre cette question ont l'intuition raisonnable de remplacer les occurrences des lettres de Σ dans A par un chemin reconnaissant l'encodage correspondant dans $\{0,1\}^*$. Le jury a attribué quelques points lorsque cette approche a été clairement expliquée. Elle n'est cependant pas entièrement satisfaisante puisqu'elle ne maintient pas le caractère déterministe de l'automate. Peu de candidats ont réussi à améliorer cette intuition en mutualisant les parties communes de ces chemins sous la forme d'un arbre binaire complet représentant l'encodage de Σ et apposé à chaque état de A.

Certains candidats ont correctement identifié le problème et proposé de déterminiser l'automate ainsi construit pour L'. Cette tentative fonctionne effectivement pour construire un automate déterministe reconnaissant L', mais il devient alors très difficile d'analyser sa taille.

Finalement, la seconde partie de la question consistait simplement à appliquer les résultats précédents de cette partie pour obtenir un DDBO reconnaissant L'_n à partir de L', et a généralement été bien traitée par les candidats qui sont parvenus jusque là.

Partie IV (8,1pts | moy 1,1 stdev 1,3)

$\triangleright$ **Question IV.1.a. [1,1 pt | 139 / 0,7 / 0,4]** Le jury attendait pour cette question une preuve formelle du résultat demandé (en général par récurrence ou par l'absurde), et qui devait donc entre autre mentionner les sommets v et w. Il a toutefois accordé la moitié des points aux candidats donnant un argument générique suffisant pour démontrer une bonne intuition de la solution.

$\triangleright$ **Question IV.1.b. [0,5 pt | 137 / 0,8 / 0,3]** Une preuve correcte pour cette question demandait de construire l'ensemble des assignations compatibles avec P, en justifiant d'une part que celles que l'on sélectionne sont compatibles, et d'autre part que celles que l'on ne considère pas ne le sont pas, pour conclure, ce qui a suffi à la plupart des candidats pour obtenir les points de cette question. Cependant, beaucoup de candidats se contentent d'affirmations rapides et non formelles, et *in fine*, seuls 7 candidats ont détecté ici une erreur dans le sujet : l'arête sortante de la dernière variable de l'ensemble considéré n'est pas testée, donc la formule demandée n'est valable que si le chemin P termine sur un nœud non étiqueté par x_k, sans quoi il faut rajouter un facteur 2.

▷ **Question IV.2.a. [1,4 pt | 51 / 0,3 / 0,4]** Cette question plus complexe demandait d'avoir une bonne compréhension des définitions d'un DDBO. En particulier les constructions raisonnant uniquement sur l'ordre des variables, et amenant à construire des forêts, n'ont pas donné de points.

Une description non-ambiguë et formelle du DDBO (sommet initial, sommets, arêtes, transitions, et labels) avec une conclusion sur la taille, suffisaient pour obtenir les points.

▷ **Question IV.2.b. [1,8 pt | 0 / 0 / 0]** Aucun candidat n'a donné de réponse correcte à cette question.

De nombreux candidats ont tenté de donner une inégalité triangulaire (fausse) sans justifications, et les candidats cherchant à faire une preuve, et arrivant à l'égalité (fausse en général) $|f_{v,t_1}^{-1}| = |f_{v_0,t_1}^{-1}| + |f_{v_1,t_1}^{-1}|$ ne prenaient en général pas suffisamment en compte les définitions du sujet, ou le fait que les étiquettes de deux sommets consécutifs dans le diagramme, ne sont pas nécessairement directement consécutives pour l'ordre.

▷ **Question IV.3. [0,5 pt | 76 / 0,4 / 0,3]** Cette question était plutôt simple, mais si de nombreux candidats ont bien donné une construction correcte leur permettant d'obtenir la moitié des points (permuter les labels des sommets terminaux suffit), l'argument principal permettant à leur construction de fonctionner (l'unicité du chemin compatible avec une assignation de toutes les variables) n'a été en général bien avancé que par celles et ceux cherchant à démontrer que leur construction était correcte.

▷ **Question IV.4. [2,7 pt | 1 / 0 / 0,1]** Cette question représentait un saut de difficulté notable par rapport à la question précédente. Un seul candidat a été plus loin que la simple intuition du produit d'automate faite par analogie avec les produits d'automate, pour préciser une construction fonctionnant sur le même langage (et non sur le langage produit) et compatible avec l'ordre des variables. En particulier, la progression dans la construction produit doit nécessairement progresser sur le DDBO original le plus « en retard » par rapport à π.

Partie V (12,9pts | moy 0,6 stdev 1,3)

▷ **Question V.1.a. [0,2 pt | 91 / 0,6 / 0,5]** Cette question ne présentait pas de difficulté particulière et était quasiment une question de cours. Le jury n'attendait pas de justification particulière. Néanmoins, beaucoup de copies contiennent la réponse erronée que le nombre de fonctions Booléennes sur n variables est 2^n ou que 2^{2^n} est égal à 4^n.

▷ **Question V.1.b. [1,1 pt | 14 / 0,2 / 0,4]** Cette question illustre parfaitement pourquoi il est important de bien rédiger ses réponses. Le jury déplore ici la mauvaise qualité des justifications : beaucoup de copies restent très vague dans leurs arguments laissant constamment planer le doute sur le fait que la borne donnée dans l'énoncé a été comprise ou si la rédaction est délibérément vague pour masquer une incompréhension. Le jury n'a donné de points ici seulement lorsque la preuve était sans ambiguïté.

▷ **Question V.1.c. [2,7 pt | 5 / 0,1 / 0,3]** Cette question était relativement difficile. Beaucoup de copies se content d'invoquer la croissance comparée sans plus de détails, ce qui ne rapportait évidemment pas de points. Il fallait ici montrer l'existence d'une famille de fonctions ayant une certaine propriété. Cela ne pouvait pas vraiment se faire ici sans construire une telle famille, ce qui manque à la plupart des copies (la famille de toutes les fonctions Booléennes convenait mais il fallait bien entendu expliquer pourquoi).

▷ **Question V.2.a. [0,4 pt | 101 / 0,9 / 0,3]** Pas de difficultés particulières ici, il suffisait de se rappeler de la définition d'une relation d'équivalence. Le jury remarque que beaucoup de copies ont traité cette question sans vraiment traiter les autres questions de la partie V. Rappelons tout de même que rappeler la définition d'une relation d'équivalence et simplement affirmer que la réponse est évidente ne rapporte pas de points.

▷ **Question V.2.b. [1,1 pt | 39 / 0,3 / 0,4]** Beaucoup de copies se contentent ici d'expliquer rapidement l'idée qui consistent à recoller des chemins pour τ_1, τ_2 et σ. Elles donnent cependant rarement tous les arguments nécessaires (unicité des chemins par exemple) ou contiennent parfois des raisonnements qui ne mentionne pas v, ce qui a été pénalisé.

▷ **Question V.2.c. [1,8 pt | 10 / 0,1 / 0,2]** Contrairement à ce qui est affirmé dans certaines copies, ceci n'est pas directement la contraposée de V.2.b. Le jury s'attend à une meilleure justification, explicitant un ensemble de porte du DDBO de la taille demandée. Beaucoup de candidats ne définissent pas non plus formellement ce qu'ils entendent par "le sommet atteint par τ", ce qui n'est pas suffisamment clair. Le jury s'attendait à une définition explicite de ce sommet (par exemple, le premier sommet ne testant pas une variable de Z sur un chemin compatible avec τ).

Certains copies considèrent à tort que les chemins compatibles avec les éléments équivalents "arrivent sur le même sommet" ce qui les amènent souvent à prouver le contraire de ce qui est demandé.

▷ **Question V.3. [0,5 pt | 30 / 0,7 / 0,4]** Cette question a été globalement bien réussie par les copies qui l'ont traitée et les pénalités viennent souvent de petites erreurs dans le schéma (flèches manquantes ou n'allant pas au bon endroit).

▷ **Question V.4. [2,3 pt | 8 / 0,2 / 0,4]** Cette question était difficile mais le jury a trouvé de bonnes copies prouvant même un résultat plus fort que celui demandé. Le jury a donné quelques points pour des raisonnements incomplets mais qui contenait un disjonction de cas qui aurait permis de conclure.

▷ **Question V.5. [2,9 pt | 1 / 0,1 / 0,2]** Cette question n'a été traité complètement dans aucune copie. Beaucoup de copies affirmaient (en disant que c'était évident) qu'il y avait $2^{n/2}$ classes d'équivalences et utilisaient les résultats précédents pour dériver la borne inférieure sur les tailles des DDBO. Cette partie de la question était bien entendue très simple et le jury n'a pas accordé de point pour cela.

Une seule copie a obtenu des points en esquissant une preuve pour construire $2^{n/2}$ classes d'équivalences. Malheureusement la copie était inachevée et le jury a seulement donné quelques points ici.

Partie VI (15,1pts | moy 0,2 stdev 0,6)

▷ **Question VI.1.a. [0,2 pt | 44 / 0,5 / 0,5]** Cette question ne présentait aucune difficulté et servait surtout aux à vérifier la compréhension des définitions.

▷ **Question VI.1.b. [0,4 pt | 56 / 0,8 / 0,4]** Le point important de cette question était bien entendu de justifier que la notion d'ordre des DDBO impliquait la non répétition des variables. Les copies ayant passé ce point sous silence n'ont pas reçu de points.

▷ **Question VI.2.a. [0,5 pt | 12 / 0,6 / 0,3]**

▷ **Question VI.2.b. [0,4 pt | 9 / 0,6 / 0,5]** Ces questions ne présentaient aucune difficulté et servaient surtout aux à vérifier la compréhension des définitions. Le jury s'attendait tout de même à ce que la copie explique brièvement comment calculer COL_n avec un DDLU (cela est très similaire à V.3 mais il est nécessaire de le remarquer). Les copies n'ayant pas fait ce travail n'ont pas reçu de points.

▷ **Question VI.3. [0,7 pt | 3 / 0,1 / 0,3]** Cette question était très similaire à IV.3. Pour donner tous les points, le jury s'attendait tout de même à ce que les candidats mentionnent l'importance du déterminisme pour la correction de leur construction (on remarquera que cela ne fonctionne pas en présence de nœuds non-déterministes).

▷ **Question VI.4. [1,1 pt | 3 / 0,4 / 0,4]** Cette question ainsi que les suivantes ont été peu (ou pas) traitées. Elle ne présentait pas de difficultés particulières non plus, le jury attendait une représentation d'un DDLU calculant $\neg g_H$.

▷ **Question VI.5. [1,4 pt | 1 / 0,5 / 0,5]** La difficulté principale de cette question était de ne pas se tromper dans la portée des quantificateurs. Il fallait en effet trouver un ensemble de taille k dont l'image est 1 pour *toutes* les solutions du rectangle, et pas seulement une assignation fixée. Deux copies l'ont tentée et une seule a proposé une preuve correcte.

▷ **Question VI.6.a. [0,5 pt | 0 / 0 / 0]**

▷ **Question VI.6.b. [1 pt | 0 / 0 / 0]**

▷ **Question VI.6.c. [2 pt | 0 / 0 / 0]** Le but final de la question VI.6 était d'établir une borne inférieure sur la proportion des couvertures par sommets qui contiennent un ensemble de sommets fixés d'un graphe de degré d. Cette question n'a été traitée par aucun candidat.

▷ **Question VI.7.a. [0,4 pt | 2 / 1 / 0]** Cette question est la dernière du sujet qui a été traitée correctement par au moins une copie. Elle ne représentait pas de difficultés particulières et pouvait être traité par l'absurde, ce qui a été fait par les deux copies qui y ont répondu. Cette question permettait surtout de préparer la suite.

▷ **Question VI.7.b. [0,5 pt | 0 / 0 / 0]**

▷ **Question VI.7.c. [2 pt | 0 / 0 / 0]** Le but des questions VI.7.b et VI.7.c était de montrer que la fonction Booléenne calculée par un DDBO de taille s pouvait se voir comme la disjonction d'au plus s rectangles équilibrés. Ce résultat permet de prouver des bornes inférieures sur la taille des DDBO calculant une fonction Booléenne en prouvant simplement une borne inférieure sur le nombre de rectangles nécessaires à la couverture de la fonction. Personne n'a traité ces questions.

▷ **Question VI.8.a. [3 pt | 0 / 0 / 0]**

▷ **Question VI.8.b. [1 pt | 0 / 0 / 0]** Ces deux questions permettaient de finir la démonstration du résultat principale de cette question : il existe une famille de fonction Booléennes qui ne peut pas être représentée par des DDLU non-déterministes de taille polynomiale, mais la négation de ces fonctions peuvent l'être. Ceci montre bien l'important du déterminisme dans la question VI.4.

Aucune copie n'a traité ces questions. Seule une copie contient quelques lignes concernant la question 8.b expliquant que $2^{n/2}$ n'est pas polynomial. Cette partie de la question étant assez anecdotique comparé au reste, le jury n'a pas attribué de point pour cela. Le jury tient à rappeler que la stratégie consistant à ne faire que les questions faciles du sujet ou les parties faciles de la question rapporte peu de points.