

Banque MP inter-ENS – Session 2021

Rapport relatif à l'épreuve écrite de Mathématiques D (épreuve spécifique à l'ENS Paris)

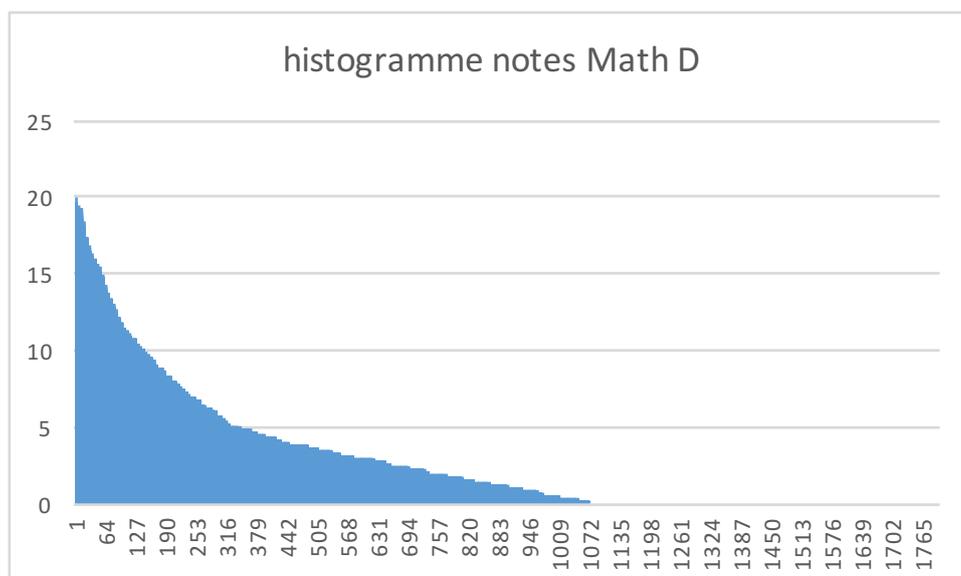
Coefficient (en % du total d'admission) : 5,6% pour les 2 options

Jury : Geoffrey Beck, Joackim Bernier, Kevin Destagnol, Nicolàs Matte Bon, Lucas Vacossin.

Cette année l'épreuve se proposait de démontrer (une version faible) d'un théorème dû à Furstenberg & Kesten sur la convergence (en probabilité) du rayon spectral d'un produit de matrices aléatoires. C'est en quelque sorte l'analogue "non-commutatif" de la loi des grands nombres. L'épreuve était composée de 4 parties relativement indépendantes (la première centrée sur l'algèbre linéaire, la seconde sur l'analyse et les probabilités, la troisième traitait d'exemples et la dernière prouvait le théorème à proprement parler).

Statistiques: Sur les 1800 inscrits, 1067 ont composé. Voici la répartition du nombre de copies en fonction de la note:

supérieure ou égale à 5/20 -> 340 copies
supérieure ou égale à 7/20 -> 246 copies
supérieure ou égale à 10/20 -> 141 copies
supérieure ou égale à 13/20 -> 79 copies
supérieure ou égale à 16/20 -> 36 copies
supérieure ou égale à 19/20 -> 11 copies
Moyenne 2.82, Ecart-type 4.07



Remarques générales:

Nous avons corrigé 1067 copies et une seule copie a eu le temps d'aborder l'essentiel des questions. Il suffisait cependant de traiter correctement deux parties pour obtenir une très bonne note. Le sujet contenant malheureusement quelques coquilles (en particulier en I.6.b il fallait

supposer A non nilpotente, et l'inégalité II.1.a) était fausse), dont le concepteur assume l'entière responsabilité. La notation a été adaptée et les copies repérant ces imprécisions ont été récompensées.

L'épreuve contenant des questions de difficultés variées et les plus dures (par ex: I.6.c, II.1.c, IV.2, IV.3, ou IV.5) comptaient environ dix fois plus que les questions simples (par ex: I.1 ou I.2) afin de favoriser les candidats et candidates qui s'y sont frotté. **Les idées et réponses incomplètes étaient comptabilisées, cependant la concision et la précision dans la rédaction était un élément clé dans la notation.**

Remarques détaillées:

Question 0 : La question était simple et l'énoncé stipulait qu'il fallait utiliser la loi des grands nombres. Pourtant, la quasi-totalité des copies ont oublié de rappeler que l'espérance (ou le moment d'ordre 2) était finie.

Partie I

La notion de norme subordonnée n'est plus explicitement au programme, mais sa manipulation a posé plus d'ennui que les correcteurs ne l'auraient cru. Les copies ayant prouvé qu'il s'agissait bien d'une norme (comme stipulé dans l'énoncé) ont été gratifiées.

1. La question 1 portait sur la sous multiplicativité de la norme subordonnée. L'utilisation de Cauchy-Schwarz fut une erreur récurrente.
2. La question 2 n'a que très rarement posé des problèmes. Attention cependant, on ne peut pas nécessairement considérer un vecteur propre associé à $\rho(A)$.
3.
 - a) Les correcteurs ont été désagréablement **surpris par les rédactions lourdes et maladroites des candidats**. Même les meilleures copies n'ont pas su expliquer de façon claire les arguments. **A quelques rares exceptions, les candidats se sont lancés dans des récurrences fastidieuses souvent vides d'arguments**: la récurrence n'est pas un argument en soi ! Trop souvent, ils n'ont pas repéré que le 3ème point découlait directement des deux autres. En réalité, **il suffisait de donner l'expression du produit quelconque de matrices**, puis de cibler les coefficients non nuls de part le caractère triangulaire de celles-ci. Enfin, en repérant que le 3ème point était immédiat, quelques lignes auraient suffi au bonheur des correcteurs.
 - b) La première partie de la question a posé plus de problèmes que la seconde.
 - c) Il y avait diverses façons de se tromper dans cette question :
 - La majoration du cardinal n'est pas toujours claire. Ceux qui ont compris l'essence des majorations par une constante C_A se sont contentés de $O(\cdot)$, et ils ont eu bien raison. D'autres candidats ont été plus précis, à leurs risques et périls.
 - Il n'y avait pas toujours exactement $n-(d-1)$ coefficients diagonaux ! il fallait donc être plutôt rigoureux pour majorer correctement les termes individuels.
 - Les divisions par 0 sont à proscrire. Il fallait faire attention au cas nilpotent. Etrangement, beaucoup de candidats ne l'ont pas vu ici, mais l'ont remarqué à la question d'après, visiblement plus gênés par un log de 0 qu'une division par 0.
4. Cette question a plutôt été bien traitée. Parmi les erreurs récurrentes, certains candidats ont faussement démontré l'égalité entre les normes de deux matrices semblables.

5. Cette question ne devrait pas poser de difficulté à un élève de MP, mais nous attendions une justification claire et précise. En aucun cas, un simple “par équivalence des normes”, encore moins un très vague “en dimension finie, la limite ne dépend pas de la norme” suffit pour satisfaire les attentes des correcteurs.
6.
 - a) Cette question a été bien réussie par les copies qui l’ont traitée.
 - b) L’énoncé n’excluait (à tort) pas le cas nilpotent, mais de nombreux candidats ont vu qu’il fallait le faire. Ils ont été récompensés. Il ne fallait pas se contenter de dire : “on applique à A^n ”, mais il fallait aussi justifier succinctement quel était le spectre (ou le rayon spectral) de A^n . Étonnamment, la deuxième partie de la question a déstabilisé beaucoup de candidats, qui ont raisonné par encadrement, alors que la limite découlait du théorème de Gelfand.
 - c) Il s’agissait d’une question très difficile, réussie seulement par les meilleures copies. Certaines copies ont démontré le résultat plus fort de la continuité des valeurs propres, ce n’était pas dans l’esprit du sujet, mais les bonnes réponses ont été bien sûr comptabilisées.

Partie II

1.
 - a) Erreur d’énoncé. Les copies qui l’ont remarquée ont été gratifiées d’un **bonus**.
 - b) Certaines copies affirment que l’inf est atteint. Il aurait fallu aussi traiter le cas où la suite prend la valeur $-\infty$, ce que trop peu de candidats ont fait.
2.
 - a) Si la borne supérieure n’a pas vraiment posé problème, cela n’a pas été le cas de la borne inf, naturellement moins évidente. Certains candidats auraient eu mieux fait de s’abstenir : **il est hors de question de dire que le rayon spectral d’un produit est le produit des rayons spectraux !** (une erreur également souvent repérée en III.1.a).
 - b) Il s’agissait de la première question à saveur probabiliste du sujet. **Les candidats étaient donc attendus au tournant et devaient bien cibler les arguments: passage à l’espérance, égalité en loi, indépendance, ou les deux.** En particulier, l’égalité en loi des $M^{(i)}$ ne permet pas à elle seule de déduire l’égalité en loi de $M^{(n)}$... $M^{(1)}$ avec $M^{(n+m)}$... $M^{(m)}$, il faut évoquer l’indépendance pour caractériser la loi du n -uplet. **Nous avons été particulièrement pointilleux sur ces points.**
 - c) Il n’y avait pas grand chose à faire dans cette question, et beaucoup y ont vu des points à grappiller. Stratégie qui n’a, bien entendu, pas été récompensée.
3.
 - a) Si un grand nombre de candidats a repéré l’inégalité de Jensen et la concavité du log, la recherche d’un contre-exemple a été beaucoup moins fructueuse et a souvent caractérisé les bonnes copies.
 - b) Il y avait pas mal de choses à faire dans cette question : utiliser la bonne inégalité pour relier au déterminant (en passant par le rayon spectral par exemple), puis cibler une fois encore les bons arguments probabilistes. Quelques candidats ont fait appel à l’inégalité de Hadamard (à redémontrer).
 - c)
 - i) Beaucoup de grappillage ici non récompensé bien sûr !
 - ii) Comme en 2b), attention à bien justifier rigoureusement chaque étape.
 - iii) Souvent bien traitée si la précédente l’était !

Partie III

1.
 - a) Beaucoup trop de candidats ne sont pas à l’aise - et c’est le moins que l’on puisse dire - avec les majorations. Lire “ $a \leq b$, $a \leq c$ donc $b \leq c$ ” est inacceptable ! **Les**

inversions E/max sont trop souvent mal ou pas justifiées. Là où seule une inégalité subsiste, certains y ont d'ailleurs vu une égalité, qu'ils ont bien entendu utilisée sur les questions suivantes (1.b, 1.c, 2.b) à tort...

b) Souvent bien traité soit en passant par N soit par la question II.3.c.ii)

c) A part les fausses solutions reposant sur la fausse égalité de 1.a), seuls les tous meilleurs se sont frottés avec succès à cette question, très difficile. Il fallait en effet revenir à des arguments probabilistes de concentration en utilisant la loi des grands nombres pour ensuite repasser à l'espérance.

2. a) Un grand classique de spé. Beaucoup de candidats ont échoué à retranscrire convenablement la preuve qu'ils connaissaient. Sa réussite caractérisait souvent les bonnes copies.

b) Il y a souvent corrélation entre réussite à la question 1.a -b et à cette question.

3. a) Oubli fréquent des log dans la réponse (sûrement dû à la fatigue) !

b) Les candidats qui se sont aventurés dans cette partie ont globalement vu pourquoi l'on obtient les égalités demandées, mais ont peiné à l'expliquer correctement. Aussi, on note un certain abus du principe de récurrence, invoqué de manière trop mécanique, et sans faire attention à formuler le bon énoncé à prouver par récurrence. En revanche, la deuxième partie de la question a été trop souvent passée sous silence: en général la norme triple n'est pas le sup de la norme euclidienne en e_1 et de celle en e_2 , il fallait utiliser le caractère orthogonal des matrices utilisées.

c) La première partie a été souvent traitée correctement mais la seconde partie a posé plus de problèmes!

d) Une estimation en utilisant que la série converge était souvent plus efficace qu'un calcul exact (qui finissait parfois par contenir des erreurs).

e) Il faut préciser quand on utilise Cauchy-Schwarz ou Jensen!

f) Traitée par les bonnes copies.

g) Réussie lorsqu'elle a été abordée.

Partie IV

A part les tentatives de grappillages sur la question 1 et 4, très peu de candidats se sont réellement aventurés dans cette partie. Une seule copie l'a abordée en profondeur. Dans les questions 2) et 3), certaines copies avaient compris les idées fondamentales mais ont eu du mal à traduire l'intuition probabiliste avec les bonnes inégalités.