

Banque MP inter-ENS – Session 2021

Rapport relatif à l'épreuve orale de mathématiques Lyon

- Ecole partageant cette épreuve : ENS de Lyon
- Coefficients (en pourcentage du total des points de chaque concours) :
 - Concours MP Option MP : 16,2%
 - Concours MP Option MI : 16,2%
- Membres du jury : R. Barbulescu, L. Dupaigne, J. Marché

L'épreuve orale de l'ENS de Lyon est similaire aux colles faites en classes préparatoires et la plupart des élèves y sont très bien préparés. Cette année environ 250 candidats ont passé l'épreuve devant un jury formé de trois enseignants-chercheurs de Paris, Lyon et Bordeaux, qui se répartissent la totalité des candidats. Chaque exercice est donné parallèlement et consécutivement à deux candidats par membre du jury, après quoi le jury se réunit et prend une décision collective sur chaque note. Les exercices sont de difficulté variable mais le jury essaie de compenser ces écarts, de façon collégiale.

À ce stade du concours, les candidats montrent un bon travail de préparation et connaissent bien le programme dans l'ensemble. Le jury apprécie que les élèves aient maintenu un tel niveau malgré la situation sanitaire. Les chapitres où les connaissances sont les moins solides sont ceux qui occupent une faible proportion du programme, comme les probabilités, le calcul différentiel à plusieurs variables et les congruences.

Rappelons le déroulement de l'oral afin de souligner les attentes. Le jury donne un exercice en général assez court et sans questions intermédiaires. Cet exercice est souvent trop difficile pour être résolu seul dans les 45 minutes de l'épreuve. Si le candidat n'avance pas, l'examineur commence à lui donner des indications au bout d'un quart d'heure au maximum. A partir de là, l'épreuve se transforme en un dialogue. Le jury valorise avant tout la capacité à trouver une stratégie de résolution et l'aisance avec laquelle le candidat la met en œuvre. Parfois la stratégie est le fruit de plusieurs tentatives, de la résolution de cas particuliers ou même d'analogies avec des exercices similaires plus simples.

Voici quelques exemples d'exercices donnés.

- Un empilement de sphères de \mathbb{R}^2 est un ensemble $X \subset \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x, y \in X$ on a $\|x - y\| \geq 2$. On appelle réseau euclidien de \mathbb{R}^2 un ensemble de la forme $\{av_1 + bv_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}^2\}$ où v_1 et v_2 sont deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^2 . La densité d'un empilement X est la quantité suivante :

$$\delta(X) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Aire}(B(O, r) \cap (\bigcup_{x \in X} B(x, 1)))}{\text{Aire}(B(O, r))},$$

où \limsup désigne le maximum des valeurs d'adhérence d'une suite. Quelle est la plus grande densité possible pour un empilement réseau euclidien ?

- Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_1 \cdots a_n)^{1/n} = 0$

2. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les valeurs propres sont réelles. On pose

$$S(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(t^2 I_n + A^2)^{-1} dt.$$

Calculer le spectre de $S(A)$. Est-elle diagonalisable?

Pour le premier exercice, les candidats ont considéré à profit le cas de réseaux carrés pour se faire une intuition: cela représente la moitié de la preuve dans le cas général. Le jury apprécie les dessins. Dans la première question de l'exercice sur les moyennes géométriques, on pouvait, par exemple, soit appliquer l'inégalité arithmético-géométrique aux seuls termes du produit commençant à partir d'un certain rang ou bien l'appliquer à la suite (na_n) . Dans le dernier exercice, la diagonalisabilité de $S(A)$ s'établit par densité des matrices diagonalisables et nécessitait de prouver la continuité de l'application S . Ont été valorisés les candidats qui avaient l'audace d'appliquer le théorème de convergence dominée à une intégrale matricielle.

Razvan Barbulescu

Louis Dupaigne

Julien Marché

