Composition de Mathématiques A, Filière MP (XLCR)

1. Commentaires généraux

Le sujet de cette année abordait la question suivante : Existe-t-il des bornes explicites du cardinal des sous-groupes finis de $Gl_n(\mathbb{Z})$? Le sujet était assez transversal puisqu'il mélangeait de l'algèbre linéaire, de la théorie des groupes, de l'arithmétique ainsi que des raisonnements sur les polynômes.

Les questions du sujet étaient bien posées et précises, et les réponses attendues, sans être évidentes, ne nécessitaient en général pas de rédactions complexes de plusieurs pages ni des vérifications fastidieuses. Elle nécessitaient d'intégrer les notations proposées par l'énoncé ainsi que les différents résultats obtenus au cours du sujet. Le jury tient d'ailleurs à préciser que l'utilisation de résultats de questions antérieures nécessite de faire une référence précise à la fois à la question et au résultat utilisé. Une formulation vague du type "d'après les résultats précédents" ou encore "d'après les résultats de la partie 1" n'est pas suffisamment précise pour être valorisée. Comme les années passées, les raisonnements par récurrence nécessitent une vigilance quant à la rédaction : l'hypothèse de récurrence doit être posée en incluant les quantificateurs adéquats.

Parmi les erreurs basiques qui sont revenues régulièrement cette année, les correcteurs ont observé que pour beaucoup de candidats, $Gl_n(\mathbb{Z})$ (i.e. l'ensemble des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont l'inverse est aussi à coefficients entiers) était identifié avec $Gl_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (i.e. l'ensemble des matrices inversibles dont les coefficients sont entiers) ce qui amenait rapidement à une confusion complète dans les réponses. De plus, un certain nombre de copies n'ont jamais justifié/expliqué clairement que l'ordre d'une matrice pouvait s'interpréter en termes d'ordre des valeurs propres une fois qu'on les savait diagonalisable. Il s'agissait d'un point important qui revenait sous une forme plus ou moins explicite dans plusieurs questions du sujet.

Globalement, le jury n'a pas constaté de baisse de niveau par rapport aux années précédentes sur cette épreuve, et ce en dépit du contexte sanitaire exceptionnel de l'année passée et de cette année. Un certain nombre de copies étaient excellentes, certaines ayant même traité l'intégralité du sujet, ce qui compte-tenu de la contrainte de temps, constitue une performance remarquable.

Rappelons enfin, comme chaque année, quelques recommandations importantes. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). De plus, un soin minimal et une écriture lisible sont attendus. Rappelons enfin que, si la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires. La stratégie de survoler le sujet en ne répondant qu'aux questions les plus simples ne pouvant aboutir à une note correcte.

2. Examen détaillé des questions

Partie Préliminaire.

1. Question abordée dans toutes les copies. Cette question présentait une difficulté pour savoir quels résultats étaient utilisables ou non puisque le résultat à démontrer était connu de tous. Dans ce type de questions, il convient de soigner sa rédaction et de se référer aux définitions proposées dans le préambule. Ainsi, une racine de l'unité renvoyait à l'existence de $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^d = 1$, ce qui donnait $|z|^d = 1$. L'argument principal se situait à ce niveau, et il était impératif de préciser que $|z|$ étant un réel positif, l'équation $|z|^d = 1$ ne donnant alors comme unique solution que $|z| = 1$. Il est regrettable de perdre des points à cause d'une rédaction imprécise sur une telle question.

2. Question abordée dans la majorité des copies mais à la rédaction parfois trop rapide. On notait que $X^d - 1$ est un polynôme annulateur mais il fallait préciser qu'il était scindé à racines simples et que ces racines sont précisément les racines $d^{\text{ème}}$ de l'unité.

3a. Il s'agit de la première question où un bon nombre de candidat n'a pas fourni de réponse. Il convenait d'être précis dans sa rédaction en utilisant correctement les multiples de q ne dépassant pas l'entier m donné. Les inégalités impliquées nécessitaient un certain soin qui a fait défaut à un large nombre de candidats.

3b. Cette question était plus difficile que les précédentes et a été peu abordée. Pourtant, il s'agit d'un résultat classique sur les valuations et en particulier leur propriété vis-à-vis de la multiplication et des nombres premiers. Une fois ce point observé, le résultat de la question précédente permettait de conclure sans difficulté, à condition de justifier son raisonnement. Il est à noter que beaucoup de candidats ont d'abord cherché à montrer que la série proposée était convergente ce qui n'était pas forcément judicieux : ses termes étant positifs, il suffisait de calculer sa valeur pour justifier sa convergence.

Partie 1.

1. Question très bien traitée. La trace étant un invariant de base, la question 2 des préliminaires fournissait le résultat demandé ce que la plupart des candidats ont trouvé.

2. Question assez bien traitée en observant que les seules valeurs propres réelles racines de l'unité sont ± 1 ce qui compte-tenu de la question 2 des préliminaires implique $d \in \{1, 2\}$. Attention ici à être précis dans l'exhaustion des cas, certains candidats ayant oublié le cas $d = 1$ par exemple.

3. Question moyennement traitée. Il s'agissait d'utiliser la trace (question 1) et de démontrer que le déterminant était nécessairement égal à 1. Pour ce dernier, beaucoup de candidats sont d'abord arrivés à un déterminant égal à ± 1 puis on exclut les cas -1 à l'aide du signe du discriminant. Ce raisonnement est bien sûr correct mais nécessite un soin dans l'élimination des cas qui n'était pas présent dans toutes les copies. Nous rappelons ici que lorsque le résultat est fourni par l'énoncé, il convient d'être précis dans sa rédaction. Un simple “donc” d'une étape intermédiaire produisant le résultat n'est clairement pas acceptable.

4. Question fortement corrélée à la précédente même si certains ont pu la traiter sans avoir répondu à la précédente. Il s'agissait de lister les cas issus des deux questions précédentes en calculant les racines et les ordres des différents polynômes

obtenus.

5. Question classique sur les relations coefficients/racines d'un polynome.

6. L'argument principal, consistant à voir que les coefficients étant entiers (et bornés par la question précédente) ne peuvent donner lieu qu'à un nombre fini de valeurs, a été souvent mal rédigé.

7. Question très peu traitée de façon satisfaisante. Il fallait impérativement faire appel aux ppcm des ordres des racines pour avoir une rédaction correcte ce qui n'a été que rarement le cas.

Partie 2.

1a. Question bien traitée. Attention néanmoins à la rédaction du caratère diagonalisable. Dans beaucoup de copies, la façon de rédiger laissait entendre que si M et M' sont diagonalisables alors $M - M'$ est diagonalisable ce qui est complètement faux.

1b. Question assez bien traitée. Il était important de souligner que la matrice était à coefficients entiers.

1c. Question bien traitée dans l'ensemble. Le piège ici était de se contenter de dire que A était nilpotente pour conclure qu'elle était nulle. Le jury a accepté les assertions du type diagonalisable+nilpotente implique matrice nulle, même si la démonstration (très rapide) était appréciée.

2a. Question peu traitée. Un grand nombre de candidats ont cherché à caractériser le noyau de l'application. Or celle-ci, définie de G dans $M_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, n'est pas un morphisme de groupes (puisque $M_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ n'est pas un groupe pour la multiplication).

2b. Question très bien traitée et facile compte-tenu de la question précédente en prenant $m = 3$.

Partie 3.

1a. Question très classique d'arithmétique et pourtant réussie seulement par la moitié des candidats. Pour un concours d'un tel niveau, le jury est surpris de constater qu'une telle question puisse mettre en difficulté une grande partie des candidats.

1b. Question parmi les mieux traitées du sujet et ne présentant pas de difficultés.

2. Question abordée par la quasi-totalité des candidats, avec cependant une rédaction manquant parfois de précision.

3. Question de synthèse des précédentes qui a été tentée par beaucoup de candidats. Il convient dans ce type de question de bien préciser sur quels ensembles on applique les résultats précédents et de vérifier que les propriétés requises pour ce faire sont bien vérifiées. Il était également nécessaire d'utiliser le petit théorème de Fermat pour conclure.

4a. Question assez bien traitée. Le cas $l = 2$ était à considérer à part, ce qui a échappé à beaucoup de candidats.

4b et 4c. Questions utilisant des résultats des questions précédentes qui doivent être impérativement précisés de façon claire.

5. Question assez bien traitée. La récurrence était immédiate ici pour aboutir à $\mathrm{Tr}(I_n) = n$ (et pas 1 comme vu dans certaines copies).

6. Question assez peu traitée. Il suffisait pourtant d'une simple inégalité triangulaire pour obtenir le résultat.

7a et 7b. Questions rarement traitées et difficiles.

8a. Question assez facile et pourtant peu traitée. Un raisonnement par double inclusion était simple à mettre en place.

8b. Question abordée par une moitié des candidats. Les correcteurs ont été vigilants sur les sommes géométriques impliquées, certains candidats essayant par des moyens frauduleux de conclure au résultat demandé fourni par l'énoncé.

9. Question assez simple à l'aide de la question 7, mais qui n'a pas été abordée par beaucoup de candidats faute de recul sur les résultats déjà obtenus.

10. Question peu abordée.

Partie 4.

1a. Question très souvent abordée mais de façon erronée. Pour justifier que l'on avait un projecteur, il était nécessaire de prouver l'égalité $f \circ f = f$. Certains candidats ont vérifié cette égalité sur le sous-espace vectoriel introduit dans la question, ce qui est bien sûr insuffisant. La partie concernant l'image a été négligée par beaucoup de candidats alors qu'elle nécessitait une démonstration.

1b. Question évidente dès lors que l'on pense au fait que la trace d'un projecteur et donné par son rang (donc un entier positif). Cela n'a été vu que par la moitié des candidats environ.

2. Question relative au produit tensoriel de matrices. Sans présenter de difficultés particulières, une bonne rédaction nécessitait d'y consacrer un certain temps, que certains n'ont pas pris.

3a et 3b. Questions bien traitées par ceux qui les ont abordées.

4a et 4b. Questions difficiles et très peu abordées en dehors du caractère de morphisme.

5a et 5b. Questions de synthèse très difficiles car nécessitant un recul important par rapport au sujet.

6a. Question assez simple utilisant le résultat de la question 3b des préliminaires, et un enchainement d'inégalités simples et assez naturelles. Mais au final, question peu abordée compte-tenu de sa position dans le sujet.

6b. Question aboutissant au résultat principal du sujet. Une simple étude de la fonction $f(x) = \frac{nx}{(x-1)^2}\ln x$ sur $[2, +\infty[$ (ou sa version exponentielle) suffisait à y répondre. Cela a été vu par un petit nombre de candidats.

La moyenne des 1436 candidats français est de 8,82/20 avec un écart-type de 4,35
La moyenne des 503 candidats étrangers est de 6,53/20 avec un écart-type de 3,82