Banque MP inter-ENS – Session 2021
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  ENS Lyon, Paris-Saclay, Rennes et Ulm

- **Coefficients (en % du total concours) :**
  — Lyon : MP & MPI 10,8 % ; Info M 11,3 %
  — Paris-Saclay : MP 9,6 %, MPI 9,6 % ; Info 13,2 %
  — Rennes : MP & MPI 9,6 % ; Info 11,4 %
  — Ulm : MP 3,7 % ; Info 13,3 %

- **Membres du jury :**
  Pascal Boyer, Thibaut Deheuvels, Alain Durmus, Pierre Lissy, Carl Tipler (correcteurs) et Laurent Berger (concepteur)

Présentation générale

L'énoncé de l'épreuve de Math C 2021 portait sur l'étude d'intersections atypiques entre le graphe d'une fonction et certains ensembles donnés. Plus précisément, le principal objet du sujet était de montrer que ce type d'intersections pouvait, sous certaines hypothèses, impliquer que la fonction appartenait nécessairement à certaines classes d'applications bien connues. Dans la première partie, les fonctions étudiées étaient les fonctions rationnelles et l'ensemble exceptionnel les points de $\mathbb{C}^2$ à coordonnées des racines de l'unité. Dans la seconde partie, les fonctions étaient les fonctions transcendantes rélles, et il s'agissait d'analyser leurs intersections avec les courbes algébriques planes puis avec un réseau de $\mathbb{R}^2$.

L'épreuve était composée de deux parties indépendantes qui nécessitaient toutes deux une bonne maîtrise des notions et techniques sur les polynômes, fonctions/fractions rationnelles ainsi que des résultats classiques sur les fonctions à valeurs réelles, les séries entières et les racines de l'unité. Quelques questions nécessitaient également de faire appel à des fondamentaux d'algèbre linéaire, de topologie ou d'arithmétique.

Les notes se sont étalées de 0 à 20, avec une moyenne de 9,46 et un écart-type de 3,93. Le jury souhaite rappeler qu'il attend des candidats clarté, précision et rigueur, et ceci même sur les questions les plus élémentaires. De manière générale, les correcteurs ont été très attentifs à la rédaction. La résolution de questions délicates a été fortement valorisée. À l'inverse, les candidats qui se sont contentés de traiter les questions les plus élémentaires ont été peu récompensés. Le jury n'a par ailleurs pas hésité à sanctionner fortement les réponses manquant de justifications convaincantes. Il convient également de préciser que la présentation tient une part non négligeable dans l'appréciation des copies. Les candidats veilleront en particulier à écrire lisiblement, et à mettre en évidence les résultats obtenus. De manière générale, toute aide à la lecture de la copie est la bienvenue. Pour plus de clarté et de concision, il est fortement recommandé aux candidats de s'aider d'un brouillon avant de rédiger au propre les réponses aux questions. Le jury rappelle par ailleurs que, sauf demande explicite du sujet, les résultats de cours ne sont pas à redémontrer.

De l'avis du jury, le problème proposé était relativement long mais abordable, avec quelques questions difficiles. Aucune copie n'est parvenue à résoudre entièrement le sujet, mais une poignée de candidats d'excellent niveau sont parvenus à traiter sa quasi totalité.

Le jury a constaté que nombre de candidats ne semblent pas à l'aise avec des raisonnements élémentaires sur les fonctions rationnelles ou sur les racines de l'unité. De plus, des techniques de base en analyse telles que la manipulation des développements limités ou les passages à la limite étaient souvent mal acquises et leurs utilisations non justifiées. Certains raisonnements classiques utilisant la compacité ainsi que la continuité n'était également pas maîtrisés par nombre de candidats. Le nombre moyen de questions abordées étant assez faible, le barème a été adapté en conséquence. Ainsi, il suffisait de répondre correctement à la première moitié des questions de la partie I pour obtenir la moyenne tandis que terminer entièrement cette partie assurait une excellente note. Réussir en outre à aborder correctement la partie II permettait alors d'avoir la note maximale. Le jury souhaite rappeler aux candidats qu'ils ne peuvent pas espérer obtenir une bonne note s'ils se cantonnent aux questions les plus simples. Ceux qui ont pris ce parti n'ont guère été récompensés.

Partie I

La première partie du sujet portait sur les intersections atypiques des fractions rationnelles. Elle proposait, après quelques résultats préliminaires, de caractériser les fractions rationnelles dont la restriction à l'ensemble des racines de l'unité prend ses valeurs dans ce même ensemble. Elle a été abordée par tous les candidats, mais de façon très inégale. Le jury a ici été très pointilleux sur l'argumentation et les raisonnements des postulants, en particulier sur les premières questions, et il a lourdement sanctionné les réponses imprécises ou incomplètes.

Question Préliminaire

La question préliminaire 1) reposait sur une itération du théorème de Rolle. De trop nombreux candidats n'ont pas su poser correctement l'hypothèse de récurrence, ou énoncer clairement les hypothèses et la conclusion du théorème utilisé. Le jury n'a pas hésité à sanctionner les raisonnements trop flous.

Fractions rationnelles et rationalité

De manière générale, la notion de fraction rationnelle n'était pas bien connue par un grand nombre de candidats. Beaucoup de confusions entre polynômes et fractions rationnelles ont été constatées, et pénalisées, par le jury.

Pour la question 2.a), un argument sur la dimension permettait de conclure. Le jury a malheureusement constaté que de nombreux candidats pense qu'une application linéaire en dimension finie est surjective si et seulement si elle est injective, ou encore que la dimension d'un produit d'espaces vectoriels est le produit des dimensions de ces espaces. Par ailleurs l'utilisation des polynômes interpolateurs dans cette question a très rarement été convaincante, les dimensions des espaces considérés n'étant pas adaptées.

Dans la question 2.b) il s'agissait d'appliquer la question précédente et d'utiliser la rigidité des polynômes. Le jury regrette que trop peu de candidats aient vérifié que V était non nul, condition nécessaire pour être le dénominateur d'une fraction rationnelle.

La question 2.c) était une application directe des questions 2.a) et 2.b).

Intersections avec le cercle unité

Le jury tient à rappeler ici que ni l'ensemble des racines de l'unité ni celui des nombres complexes de module 1 n'est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Les candidats qui ont affirmé le contraire, sans pour autant utiliser ce fait, ont bien sûr été pénalisés.

Pour les questions 3.a) et 3.b), souvent bien traitées, il était plus sage de procéder par double implication afin de bien dégager les arguments. Pour la 3.a), il est utile de se souvenir que la conjugaison sur les complexes est un morphisme d'anneau.

La question 4) a été généralement bien traitée.

Dans la question 5.a), le jury a été particulièrement attentif à la manipulation des pôles. Là encore, travailler par double implication permettait une argumentation claire et rigoureuse.

La question 5.b) découlait de la 5.a), mais de nombreux candidats n'ont pas suivi l'indication et ont probablement perdu du temps en revenant à la définition de fonction spéciale.

La question 5.c), un peu plus difficile, a été souvent abordée, mais rarement avec un argument complet. Il était plus simple d'exclure l'origine dans le compte des racines de F pour procéder à la récurrence. Il était bien entendu nécessaire de vérifier les hypothèses pour appliquer une récurrence, et en particulier de vérifier le caractère spéciale de la fonction à chaque étape.

Racines de l'unité

Cette partie contenait quelques questions plus ardues, et nécessitait certains résultats classiques d'arithmétique. Les candidats qui ont fait l'effort de l'aborder jusqu'au bout en maintenant un argumentaire claire et précis ont souvent été récompensés d'une excellente note.

Le jury a été très attentif aux justifications de la question 6) qui semblait pourtant élémentaire. De nombreux candidats n'ont pas réussi à justifier proprement l'existence et l'unicité de q_j qui découlait de celle de l'argument dans $]-\pi,\pi]$ d'un nombre complexe.

La question 7) portait sur un passage à la limite qu'il fallait justifier par un argument de compacité.

Les questions 8.a) et 8.b) étaient résolues par un développement limité et un passage à la limite. Il était toutefois nécessaire de se ramener à une fonction polynomiale pour utiliser l'indication de la question 8.a) en 8.b).

La question 9) reposait sur le caractère stationnaire d'une suite convergente d'entiers. Elle a été abordée par un petit nombre de candidats.

La question 10) a été rarement traitée et reposait sur un choix judicieux de p. Par exemple, le PPCM des $q_1,\dots,q_d$ et $n_1,\dots,n_d$ où d est strictement supérieur à la somme des degrés du numérateur et du dénominateur de F convenait.

Les questions 11.a) et 11.b) ont été abordées par un petit nombre de candidats. Pour la 11.a), il n'était pas suffisant d'énoncer le théorème de Bézout : il fallait travailler un peu plus pour se convaincre que ce dernier permettait d'obtenir le résultat.

Les questions 12) et 13) ont été abordées par une poignée de candidats et faisaient office de synthèse pour cette première partie.

Partie II

La deuxième partie était indépendante de la première et avait pour objet d'étude les intersections entre les graphes des fonctions transcendantes réelles et les réseaux plans. De manière générale, elle a été abordée sérieusement par une petite partie seulement des candidats. Quelques-uns ont fait le choix de se concentrer uniquement sur cette deuxième partie, ce qui permettait également d'obtenir une très bonne note. En revanche, les postulants qui ont traité superficiellement les parties I et II, en se limitant aux questions les plus simples, n'ont pas pu obtenir la moyenne.

Courbes et fonctions transcendantes

L'objectif de cette partie était d'obtenir une borne sur le nombre d'intersections possibles entre le graphe d'une fonction transcendante et une courbe algébrique plane de degré maximal fixé. De nombreuses questions étaient très abordables, et le jury a été particulièrement soucieux de la clarté et de la précision de l'exposition pour les questions les plus simples.

La question 14) était une simple application du cours. Il n'était pas nécessaire de redémontrer que la somme d'une série entière est lisse sur son disque ouvert de convergence. De nombreuses tentatives de démonstration de ce fait n'était pas correctes et ont été sanctionnées.

Les questions 15.a), 15.b), 16) et 17) ont été souvent réussies, la première reposant sur un argument de croissance comparée, la seconde sur une translation de la fonction. Pour les 16) et 17), il suffisait d'utiliser la définition de transcendance (en se ramenant à la forme de la question 15) pour une combinaison du type $\sum_i f^i P_i$ dans la question 16)).

La première partie de la question 18) découlait également des hypothèses : la courbe C_r vérifie $|\Gamma(f) \cap C_r| \geq r^2$. Si C_r est définie par $\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} x^{i-1} y^{j-1} = 0$, la fonction $\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} x^{i-1} (f(x))^{j-1}$ est dans V, non nulle car f est transcendante, et satisfait la condition sur le nombre de zéros. La deuxième partie de la question reposait sur le principe des tiroirs.

La question 19) a été bien traitée, quand elle était abordée. Il s'agissait simplement de normaliser les coefficients $a_{i,j}$ qui définissaient les fonctions obtenues dans la question 18).

La question 20), souvent approchée de manière peu convaincante, nécessitait un peu de soin. La compacité de S_n est un résultat classique. On pouvait ensuite procéder par extractions successives.

La question 21) était la plus technique de cette partie, et n'a été traitée correctement que dans quelques copies. Il fallait tout d'abord fixer un ordre de dérivation k, puis utiliser la question préliminaire 1), avec la question 19), pour obtenir l'existence d'un zéro $x_s \in K_{r_s}$ de la dérivée k-eme de $G_{\underline{a}_{r_s}}$, pour $s \geq k+1$. Par ailleurs, des questions 19) et 20) on déduit que la longueur des K_{r_s} tend vers 0 et que le minimum des K_{r_s} tend vers x. Donc la suite $(x_s)_{s \geq k+1}$ converge vers x. Comme $(\underline{a}_{r_s})$ converge vers $\underline{a}$, on peut justifier le passage à la limite $\lim_{s \to +\infty} G^{(k)}_{\underline{a}_{r_s}}(x_s) = G^{(k)}_{\underline{a}}(x) = 0$, et conclure.

Une inégalité - Intersections atypiques, le cas transcendant

Les deux dernières parties proposaient de démontrer le Théorème 4, à savoir un contrôle sur le nombre de points d'intersection entre le graphe d'une fonction transcendante et un réseau plan dont le volume tend vers 0. Une inégalité était d'abord démontrée de manière indépendante via le Théorème 3. Les questions qui menaient à sa preuve faisaient appel à des techniques classiques et les quelques candidats qui ont pu les aborder avec calme les ont réussies. Le jury rappelle que même à ce point avancé du sujet, une rédaction un peu trop négligée ne rapportera aucun point. La fin du sujet, et la preuve du Théorème 4, contenait des questions plus difficiles, en particulier les 28) et 29), et n'a presque jamais été étudiée.

⋆ ⋆
⋆