Banque MP inter-ENS – Session 2021

Rapport relatif à l'épreuve orale de maths

- **Ecoles partageant cette épreuve :**
  ENS Paris-Saclay, ENS Rennes
- **Coefficients** (en pourcentage du total des points de chaque concours) **:**
  - ENS Paris-Saclay
    - Concours MP Option MP : 23,1 %
  - ENS Rennes
    - Concours MP Option MP : 23,1 %
- **Membres du jury :**
  M. Breden, H. Hivert, R. Tesson

Déroulement de l'épreuve

Cette année, 269 candidats et candidates ont passé l'oral de mathématiques spécifique pour les Écoles Normales Supérieures de Rennes et Paris-Saclay. Il s'agit d'un oral sans préparation, d'une durée de 45 min, constitué d'un exercice qui commence en général par une question simple ou proche du cours —voire une démonstration au programme officiel —et comporte la plupart du temps plusieurs questions intermédiaires ou indications prévues pour êtres fournies au cours de la réflexion du candidat. Les premières minutes de l'examen sont dédiées à un travail en autonomie du candidat durant lesquelles l'examinateur n'intervient pas du tout. Cela a pour but de permettre au candidat de s'approprier l'exercice en pleine concentration. Il est conseillé au candidat de ne pas hésiter à utiliser le tableau avec abondance lors de cette première phase, y compris dans une approche de brouillon. Il n'est tenu aucune rigueur au candidat de raisonnements ou résultats faux écrits durant cette phase du moment qu'ils soient corrigés lors de la restitution orale. La suite de l'oral prend la forme d'une discussion avec le jury durant laquelle ce dernier intervient pour aiguiller ou questionner le candidat, que ce soit sur l'exercice ou bien sur une notion connexe. À quelques rares exceptions près, les exercices n'ont été posés que deux fois durant toute la durée des oraux, sur deux interrogations successives, et à trois candidats en parallèle.

Sont évalués à la fois la méthode, la rigueur, la connaissance du cours et les compétences techniques, mais aussi l'autonomie, le dynamisme et les capacités de communication. Il va sans dire qu'on ne peut que déconseiller aux futurs candidats et candidates de négliger un de ces points lors de leur préparation. En revanche, le jury n'évalue que très peu la capacité à trouver une solution astucieuse et épiphanique à un exercice : un candidat ou une candidate avançant à son rythme et avec rigueur vers la résolution du problème, en proposant de résoudre des cas particuliers bien choisis ou des résultats intermédiaires, et capable de rebondir sur les indications de l'examinateur, se verra attribuer une excellente note.

À l'abord d'une nouvelle question, le jury laisse au candidat le temps de creuser une piste et de réfléchir, puis rapidement une discussion s'engage avec le jury. Selon les situations, cette discussion peut prendre plusieurs formes : l'examinateur peut demander des éclaircissements ou des corrections mineures sur la preuve proposée, une synthèse de l'idée de preuve ou au contraire, réclamer une rédaction plus précise et rigoureuse des arguments précédemment fournis par le candidat.

Évaluation générale des candidats

Le jury s'accorde à dire que l'ensemble des admissibles est de bon niveau, avec une connaissance approfondie du cours, de nombreux réflexes mathématiques et des qualités en calcul. On observe de temps en temps des personnes plus sensibles au stress ou qui semblent perdre courage au fur et à mesure de l'oral. Nous rappelons donc à l'ensemble des admissibles que les questions du jury sont là pour aider à avancer dans l'exercice, que chaque année des candidats font de très bons oraux après un départ laborieux, et qu'il ne faut pas chercher à interpréter la discussion avec le jury, les exercices étant très différents les uns des autres. Bien sûr, le but du jury n'est en aucun cas de piéger les candidats, par ailleurs déjà assez sujets au stress : si l'un d'eux se voit demander s'il est sûr de ce qu'il vient d'affirmer, c'est probablement parce que l'interrogateur ou l'interrogatrice pense que c'est faux (ou alors qu'il n'est pas bien certain, au vu du ton du candidat, si ce qui vient d'être dit est une affirmation ou bien une question).

Comme les années précédentes, nous avons noté que de nombreux candidats ne pensent pas à appuyer leur réflexion sur des dessins qui se révèlent parfois un soutien indispensable à la résolution d'un exercice et qui est, dans tous les cas, d'une grande aide pour clarifier son propos. Les formules de Taylor sous toutes leurs formes semblent mal maîtrisées par de trop nombreux candidats et le jury a été surpris de constater l'incapacité de plusieurs candidats à démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange partant de Taylor avec reste intégral. De manière générale, le jury s'est étonné que certains candidats semblent maîtriser des notions largement hors-programme mais se retrouvent démunis face à des questions plus élémentaires, y compris en algèbre linéaire. Citons à titre d'exemple : les valeurs propres de matrices symétriques sont réelles, forme générale d'une équation différentielle linéaire et passage de l'ordre n à l'ordre 1, théorème de la bijection, comprendre et démontrer qu'une fonction de plusieurs variables dont la différentielle est constante est une fonction affine, un espace vectoriel ne doit pas être vide, etc.

Conseils pour les futurs admissibles

Ces conseils recoupent en grande partie ceux des années précédentes.

- On voit trop de candidats refuser de rédiger leurs preuves et se contenter d'en répéter l'idée générale, malgré l'insistance du jury. Si l'exposé de la stratégie de preuve est apprécié par le jury, sa mise en œuvre se révèle souvent plus délicate qu'il n'y paraît. Il faut donc rédiger proprement une preuve, vérifier les hypothèses des théorèmes, éventuellement énoncer des résultats intermédiaires, etc. Faire manifestement preuve de réticence à écrire son raisonnement au tableau a été systématiquement sanctionné.
- De même, malgré l'insistance parfois pressante du jury, certains candidats rechignent à écrire proprement les hypothèses des questions au tableau, et plus généralement tout ce qui ne relève pas de la formule mais fait quand même partie intégrante du langage mathématique : connecteurs logiques, quantificateurs, etc. Inutile de dire que c'est une très mauvaise idée. En premier lieu, cela permet, à tout moment, de retrouver l'énoncé précis du résultat auquel on souhaite aboutir, et d'isoler les hypothèses utiles à chaque étape du raisonnement. Ensuite, cela permet de réutiliser dans la suite de la planche les questions déjà traitées (ce qui est en somme assez courant). Enfin, ne pas faire ce que demande le jury démontre soit une capacité de communication limitée, soit une témérité quelque peu inattendue lors d'une épreuve orale. Notons que la gestion du tableau est une compétence évaluée, au moins indirectement, par le jury : des candidats se sont retrouvés bloqués au cours de la planche du fait d'avoir effacé une partie de leurs résultats, et ce malgré les protestations de l'interrogateur. D'autres ont perdus un temps précieux à réécrire plusieurs

fois des raisonnements déjà effectués en questions précédentes mais effacés instantanément. Se forcer à présenter correctement son tableau, c'est aussi s'assurer d'avoir à tout moment la structure de l'exercice en tête.

- Certains candidats ne tiennent pas compte des pistes fournies par l'examinateur au cours de l'épreuve. Le but du jury n'est pas d'embrouiller le candidat ou de le lancer sur de fausses pistes, mais bien de le guider dans la résolution d'exercices parfois difficiles. Ces pistes même si elles n'évoquent rien immédiatement au candidat doivent néanmoins faire l'objet d'investigation.
- De manière similaire, la première question de l'exercice fournit, dans bon nombre de cas, une indications devant être utilisée dans la suite de l'exercice. Lorsqu'il est demandé de rappeler une formule de Taylor au début de l'exercice, il est fort probable que celle-ci intervienne dans la suite de l'exercice et il est assez regrettable que certains candidats ne songent alors pas à exploiter cette première question. A contrario, certains candidats cherchent par tous les moyens à traiter la question 2 à l'aide de la question 1. Les questions ne sont pas nécessairement imbriquées les unes dans les autres. Il est davantage attendu du candidat qu'il adopte une posture de recherche active en réfléchissant au problème qui lui est posé plutôt que d'essayer de faire intervenir artificiellement un résultat préliminaire.
- À tout moment de l'oral le jury peut être amené à poser des questions très simples autour du cours ou de cas particuliers. C'est tout à fait normal et cela ne présage en rien de la réussite de la personne interrogée, mais vise à évaluer de manière la plus complète possible son oral. Cela peut aussi constituer une indication (à demi) cachée pour la résolution de l'exercice, que ce soit par l'utilisation directe de la propriété demandée ou bien de son idée de preuve. Certains candidats ont été mis en défaut sur ces questions. Il est crucial de rappeler que le cours doit être maîtrisé.
- Le jury apprécie grandement les candidats et candidates qui, lorsqu'ils sèchent sur une question, proposent d'eux même de considérer des cas simples (le plus souvent il s'agit de traiter le cas n=2 avant de s'attaquer à des n quelconques, que n soit une dimension, une régularité, un cardinal ou un paramètre). Il est assez rare que les personnes interrogées osent simplifier un énoncé difficile, or quand elles le font l'initiative est souvent couronnée de succès et débouche sur une preuve générale. Lorsqu'une telle simplification devient triviale et ne permet pas d'avancer sur le cas général, le jury apprécie aussi que les candidats s'en rendent compte d'eux-mêmes.
- Au contraire, certains candidats essaient de résoudre la question posée en cherchant exhaustivement une astuce qui permettrait une solution immédiate et lucrative en termes de note finale. Comme nous l'avons déjà dit, nous ne cherchons pas à évaluer ce type de compétences. Les exercices proposés ne sont pour ainsi dire jamais « à astuce », mais demandent une certaine imprégnation de l'énoncé et des notions mises en jeu (à l'instar de presque tous les problèmes de recherche). Ils nous permettent de tester des qualités qui feront des futurs normaliens et normaliennes de bons enseignants et de bonnes chercheuses : compréhension profonde des objets manipulés (qui constitue un prérequis aux compétences pédagogiques) et capacités d'adaptation face à un problème nouveau. Les rares exercices présentant une «astuce» ont fait l'objet d'indications claires et précises dans l'énoncé ou bien directement par l'examinateur le cas échéant.
- Les exercices font parfois intervenir des objets ne tombant pas directement dans le programme (par exemple, des EDO non linéaires). Dans ce cas, le jury est bien conscient de ce fait, et aucune connaissance hors programme n'est attendue des candidats. Le but de telles questions est de voir comment l'aspirant normalien réagit face à la nouveauté ou à un cadre original. Les énoncés sont conçus pour pouvoir être résolus grâce à une réflexion ne faisant intervenir que des notions connues des candidats. De même il est rappelé qu'un

étalage de connaissance hors-programme ne fait gagner aucun points supplémentaires. Les quelques candidats s'y étant risqué ont au contraire mis en avant une difficulté à se concentrer sur une problématique donnée et à identifier de façon précise les connaissances nécessaires à la résolution de l'exercice.

- Le niveau des exercices proposés étant relativement hétérogène, il est compensé par la quantité d'indications fournies par le jury. Les candidats ne doivent donc pas s'inquiéter si l'examinateur à tendance à lui en fournir régulièrement : cela peut simplement signifier que l'exercice proposé est très difficile et nécessite un soutien régulier du jury pour être résolu dans les 45 minutes imparties.

Pour illustrer quelques-uns de ces points, voici des exemples d'exercices proposés lors des épreuves orales. Pour certains exercices, seules les premières questions étaient données aux candidats au début de l'oral.

Exercice :

Soit $\alpha \in \,]0,1]$. Une personne joue $n \in \mathbb{N}^*$ parties d'un jeu à deux issues (victoire ou défaite), avec à chaque partie une probabilité $\frac{\alpha}{n}$ de victoire.

1) On suppose les parties mutuellement indépendantes. Montrer que la probabilité d'avoir exactement 1 victoire au total est minorée par une constante strictement positive et indépendante de n.

2) On suppose seulement les parties deux à deux indépendantes. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai ?

Commentaires.
Le calcul de la probabilité de l'événement "gagner exactement une partie" n'a pas posé de problème particulier aux candidats, mais de manière un peu surprenante la fin de la première question s'est avérée plus difficile pour certains. La probabilité en question étant strictement positive, il suffisait pourtant de montrer que la limite quand n tend vers l'infini était strictement positive.

La deuxième question était plus délicate, et a permis d'évaluer à la fois la prise d'initiative et la réactivité des candidats face aux indications du jury.

Le jury a souvent suggéré aux candidats de s'intéresser au cas $\alpha = 1$, pour lequel la probabilité de l'événement "ne pas gagner exactement une partie" faisait naturellement apparaitre l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Certains candidats ont semblé un peu désarçonnés par le fait que la minoration obtenue ne permettait pas de conclure comme à la première question, alors même que la seconde question était posée de manière ouverte.

Une autre indication souvent donnée ensuite par le jury était de chercher à caractériser le cas d'égalité dans l'inégalité obtenue. Une fois cette caractérisation obtenue, il restait à montrer qu'on pouvait bien construire des variables aléatoires satisfaisant ces contraintes. Le jury regrette que peu de candidats pensent alors spontanément à étudier la situation pour de petites valeurs de n, et à construire explicitement des variables aléatoires définies sur un ensemble fini.

Dans le cas $\alpha < 1$, on ne pouvait plus utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, mais l'inégalité de Markov permettait d'obtenir des majorations similaires, et on pouvait dans ce cas directement conclure comme dans la première question.

Exercice :

On note $\mathbb{U}$ le cercle unité du plan complexe, c'est à dire l'ensemble des nombres complexes de module 1. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante, et telle que $f(x+1) = f(x)+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) On définit une application ϕ_f sur le cercle unité par

$$\phi_f\left(e^{i2\pi\theta}\right) = e^{i2\pi f(\theta)}.$$

Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\phi_f(z)$ est bien définie (c'est à dire ne dépend pas du choix de θ), et que ϕ_f est une bijection de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$.

2) Dans cette question, on considère différents exemples pour f, et on étudie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le comportement de $\frac{f^n(x)-x}{n}$ quand n tends vers l'infini.

— Exemple 1 : $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x + \alpha$. Que représente la quantité obtenue pour ϕ_f ?

— Exemple 2 : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \end{cases}$$

et telle que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On considère maintenant une fonction f quelconque satisfaisant les hypothèses de l'exercice.

3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f^n(x)-x}{n}$ converge vers une limite $\rho(f) \in \mathbb{R}$ indépendante de x.

4) Montrer qu'il existe une orbite périodique pour ϕ_f, c'est à dire qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left(\phi_f\right)^n(z) = z$, si et seulement si $\rho(f) \in \mathbb{Q}$.

Commentaires.

Cet exercice, relativement long, a donné lieu a deux planches différentes, une centrée sur la question 3, et une autre sur la question 4 (en admettant le résultat de la question 3).

Les deux premières questions ne contenaient pas de difficultés particulières, et avaient principalement pour but de familiariser les candidats avec les hypothèses pour la suite, et de donner une interprétation géométrique au problème.

Cependant, l'exemple 2 de la question 2 a parfois occupé les candidats pendant une bonne partie de l'oral. Certains candidats ont profité de cette question pour montrer leur maitrise de l'étude des suites récurrentes d'ordre 1, mais en faisant parfois preuve d'un manque de recul par rapport à la question posée : il suffisait de montrer que la suite $(f^n(x))_n$ était bornée pour conclure, inutile d'aller plus loin dans l'étude de la suite. Pour d'autres, la résolution de cette question a été surprenamment laborieuse, notamment par manque de dessins...

Les questions suivantes étaient plus délicates et le jury a donné différentes indications aux candidats.

Pour la question 3, les candidats ont été invités à comparer le minimum et le maximum de $x \mapsto f^n(x)-x$ (en remarquant notamment que cette fonction est 1-périodique), afin de remarquer qu'il suffisait de démontrer que $\frac{1}{n}\max_{x\in\mathbb{R}}(f^n(x)-x)$ converge. Afin d'obtenir cette convergence, on peut commencer par démontrer que $(\max_{x\in\mathbb{R}}(f^n(x)-x))_n$ est sous-additive.

Pour la question 4, le sens direct était le plus facile, mais a néanmoins posé des problèmes à plusieurs candidats s'obstinant à écrire tous les calculs modulo 1, ce qui faisait perdre une partie de l'information. Pour le sens réciproque, le jury a suggéré aux candidats de raisonner par contraposé.

Exercice :

1) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral, vous écrirez le reste sous la forme d'une intégrale entre 0 et 1.

Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$. On appelle *support* de ϕ, noté $\mathrm{Supp}(\phi)$ l'adhérence de l'ensemble des points où ϕ est non nulle
$$\mathrm{Supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R},\ \phi(x) \neq 0\}}.$$

On note $C_c^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont le support est compact. On considère l'ensemble des formes linéaires $T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, qui vérifient

$$\forall K \subset \mathbb{R} \text{ compact},\ \exists C_K > 0,\ \exists\, p \in \mathbb{N},\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),\ \mathrm{Supp}(\phi) \subset K,\ |T(\phi)| \leq C_K \sum_{i=0}^{p} \sup_{x \in K} |\phi^{(i)}(x)|, \tag{D}$$

où $\phi^{(i)}$ désigne la dérivée i-ième de ϕ. On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble des formes linéaires sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifient (D).

L'entier p dépend *a priori* du compact K. Si il peut être choisi indépendamment de K, on dira que *$T \in \mathcal{D}$ est d'ordre inférieur ou égal à p*. On dit que *$T \in \mathcal{D}$ est d'ordre p* si T est d'ordre inférieur ou égal à p, mais pas d'ordre inférieur ou égal à $p-1$.

2) Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des formes linéaires sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

On note
$$\begin{array}{rcl} T_{1/x} : C_c^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x. \end{array}$$

3) Montrer que $T_{1/x}$ est bien défini, et que $T_{1/x} \in \mathcal{D}$.

4) Montrer que $T_{1/x}$ est d'ordre 1.

Commentaires.

Contre toute attente, la première question a posé des problèmes à quelques candidats, qui ont mis du temps à effectuer le changement de variable adéquat dans l'intégrale. Ces candidats n'ont pas pu profiter du temps d'autonomie du début d'oral pour prendre en main le sujet, ce qui leur a fait perdre du temps lors de la discussion.

La deuxième question ne comportait pas de difficulté particulière et a été bien traitée en général, du moins lorsque les étudiants savaient ce qu'il faut vérifier pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. Ne pas être à l'aise avec ce genre de démonstration est du plus mauvais effet. Cette question permettait surtout de manipuler la définition de l'ensemble $\mathcal{D}$, afin d'aborder les questions suivantes sereinement.

La troisième question a posé plus de difficultés aux étudiants, certains n'ont pas pensé à essayer d'utiliser la formule de Taylor de la question 1, qui était pourtant là pour servir d'indication. Il était attendu que les différents calculs et justifications nécessaires à la résolution de cette question soient très soigneusement traités.

Avec les calculs de la question précédente, les candidats ont tou.te.s très rapidement vu que $T_{1/x}$ était d'ordre inférieur ou égal à 1. Construire un contre-exemple permettant de montrer que $T_{1/x}$ n'est pas d'ordre 0 s'est avéré plus difficile. Le jury a apprécié que les candidats fassent un dessin.

Exercice :

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Dans tout cet exercice, on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$, et $\| \cdot \|$ la norme associée.

1) Soit $u \in \mathbb{R}^d$, tel que $\|u\| = 1$. Donner l'expression du projeté orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u)$ et sur $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Soit A une matrice symétrique réelle de taille d. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ ses valeurs propres, et $(v_1, \dots, v_d)$ des vecteurs propres associés. On suppose que $\|v_i\| = 1$ pour tout $i \in [[1, d]]$, et que les $(\lambda_i)_{i \in [[1,d]]}$ sont tels que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_d| > 0.$$

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^d$, tel que $\langle x_0, v_1 \rangle \neq 0$ et $\|x_0\| = 1$, et on définit trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{cases} y_{n+1} = Ax_n \\ x_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|} \\ \ell_{n+1} = \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} \rangle . \end{cases}$$

2) Montrer que la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite.

3) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

4) On suppose λ_1 et v_1 connus. Construire une suite qui converge vers λ_2.

5) Construire une suite qui converge vers λ_d.

Commentaires.

Une bonne connaissance des résultats relatifs à la réduction des matrices symétriques réelles était nécessaire pour cet exercice.

Pour la question 2, il était naturel de déterminer à la main les premières itérations de la suite. Ce calcul élémentaire permet de comprendre très rapidement vers quelle valeur la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. En revanche, le jury attendait une justification rigoureuse de cette convergence. Cela a été difficile à obtenir de certains candidats, qui voulaient se contenter de calculs approximatifs. Ces mêmes candidats en déduisaient un peu vite que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors que les calculs de la question précédente montraient justement qu'elle pouvait ne pas l'être.

Une fois les questions 2 et 3 traitées avec rigueur, le jury a accepté des raisonnements “avec les mains” pour traiter la fin de l'exercice. Cette phase n'est arrivée qu'en toute fin d'oral, et sur proposition expresse du jury.

Exercice :

1) Donner le théorème de sommation par paquets

2) On considère une suite de fonctions $f_n \in C([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant :

$$|f_n(x) f_m(x)| \leq 2^{-|n-m|}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ x \in [0, 1]$$

Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

3) Montrer que $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est bornée sur $[0,1]$.

4) La convergence est-elle uniforme ?

5) Montrer qu'en un point x où il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_0}(x) \neq 0$ la série converge normalement au voisinage de x.

Commentaires.

Bien qu'un peu hésitants, la majorité des candidats a pu restituer un théorème de sommation par paquets correct en question 1.

De manière très surprenante la question 2 a posé des difficultés à de nombreux candidats. Sur cette question et plus globalement sur tout l'exercice, un des écueils les plus fréquents a été de rencontrer des candidats essayant de montrer directement des résultats de type convergence uniforme (et ce, même quand l'énoncé ne mentionne que la convergence ponctuelle).

La question suivante était bien plus dure et faisait intervenir la sommation par paquets. Très peu de candidats ont songé à l'utiliser. Après indication par le jury, il a souvent été compliqué de faire construire les paquets souvent par manque de recul sur la difficulté liée à la maîtrise de la somme.

Un dessin était attendu sur cette question pour construire un contre-exemple à la convergence uniforme. Celles et ceux qui s'en sont donnés la peine ont bien souvent réussi à expliquer clairement le problème de la convergence uniforme. Un certain nombre de candidats n'ont pas d'idées sur les contre-exemples classiques au défaut de convergence uniforme.

Exercice :

1) Je considère un dé non pipé et je note X la variable aléatoire correspondant au résultat du dé. Quelle loi suit X ? Donner sa variance et son espérance. Même question pour la variable aléatoire correspondant à l'évènement "faire un 6".

2) Montrer qu'il n'est pas possible de piper des dés de sorte que la variable aléatoire "somme des deux faces" soit uniformément répartie.

3) On est en fait ramené à regarder les factorisations $PQ = 1 + \cdots + t^n$. Avec P et Q des polynômes réels à coefficients positifs.

a) Montrer que si P est un polynôme réel dont toutes les racines sont de module 1 alors il est palindromique ou anti-palindromique.

b) En déduire que dans notre cas P et Q sont palindromiques.

c) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que tous les coefficients de P et Q sont dans $\{0,\alpha\}$ et $\{0,\beta\}$. Qu'est-ce que cela signifie en terme de probabilités.

d) Exhiber un exemple de décomposition de loi uniforme.

Commentaires.

Les étudiants ont généralement songé (parfois avec un peu d'aide) à utiliser la fonction génératrice pour répondre à la question. En revanche certains candidats n'ont pas pensé à parler des racines du polynôme obtenu, et en particulier à utiliser l'imparité du degré.

Dans les questions suivantes beaucoup de candidats rencontrés avaient des connaissances sur les polynômes palindromiques et connaissaient l'emploi du polynôme réciproque. Ce ne sont pas nécessairement celles ou ceux qui ont le mieux réussi les questions, car oubliant assez rapidement que les polynômes considérés sont à coefficients positifs. Il était notamment attendu en question 3a une justification propre du fait que le polynôme réciproque avait les même racines, avec même multiplicité, ce qui a parfois manqué. La question 3c a aussi posé quelques difficultés. De manière générale, de nombreux.ses candidats pensant pouvoir gagner du temps sur des notions déjà abordées en cours, ont perdus du temps (et des points) par manque de rigueur.