

**ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2022

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE SCIENCES DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Lyon, Paris, Paris-Saclay et à l'ENPC

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet comprend 4 pages numérotées de 1 à 4. Il porte sur deux modèles d'épidémiologie. Il comporte deux parties indépendantes (à l'exception des questions 4 et 10.b).

Il est recommandé de lire attentivement et patiemment le sujet. Il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Début de l'épreuve

Première partie : Un modèle probabiliste pour la propagation des épidémies

On considère un modèle probabiliste pour représenter une épidémie. Soit $(X_{n,k})_{n,k}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, à valeur dans \mathbb{N} , indexée par deux entiers $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires ont une même loi de référence X admettant une espérance.

Soit $(Z_n)_n$ le nombre de personnes infectées lors de la n -ième semaine. On suppose que chacune des Z_n personnes infectées à la semaine n contamine à son tour un nombre aléatoire de personnes, respectivement $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,Z_n}$ lors de la semaine suivante. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}.$$

On suppose $Z_0 = 1$, c'est-à-dire que l'épidémie démarre avec un unique patient zéro. On note

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k := \mathbb{P}(X = k) \quad \text{et} \quad m := \mathbb{E}(X).$$

On fait l'hypothèse que

$$p_0 > 0, \quad p_0 + p_1 < 1.$$

Enfin, on définit

$$\forall 0 < t \leq 1, \quad \phi(t) := \mathbb{E}(t^X).$$

1) a) Montrer que

$$\forall 0 < t \leq 1, \quad \phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k.$$

On admettra que ϕ est continue sur $[0, 1]$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$ et que

$$\forall 0 < t \leq 1, \quad \phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k t^{k-1}.$$

b) Montrer que ϕ est croissante, que $\phi(0) = p_0$, que $\phi(1) = 1$ et que $\phi'(1) = \mathbb{E}(X) = m$.

Soit $\phi_n(t) := \mathbb{E}(t^{Z_n})$ pour tout $t \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Montrer que

$$\forall 0 < t \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+1}(t) = \mathbb{P}(Z_n = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \mathbb{E}(t^{\sum_{k=1}^j X_{n,k}}).$$

b) Montrer que

$$\forall 0 < t \leq 1, \quad \phi_{n+1}(t) = \phi_n(\phi(t))$$

et que

$$\forall 0 < t \leq 1, \quad \phi_n(t) = \phi \circ \dots \circ \phi(t)$$

(c'est-à-dire qu'on compose n fois la fonction ϕ pour obtenir ϕ_n).

c) Montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = m\mathbb{E}(Z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

On définit

$$\tau := \inf\{n \geq 0 \mid Z_n = 0\},$$

cette quantité pouvant éventuellement valoir $+\infty$, et

$$\xi := \mathbb{P}(\tau < +\infty).$$

3) a) Expliquer pourquoi ξ est la probabilité d'extinction de l'épidémie.

b) Montrer que $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) \geq \mathbb{P}(Z_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$ (on pourra pour cela remarquer que les événements $C_n := \{Z_n = 0 \text{ et } Z_{n-1} \neq 0\}$ sont deux à deux incompatibles).

c) Calculer $\phi_n(0)$ et montrer que $\phi(\xi) = \xi$.

d) Montrer que si $\zeta \in [0, 1]$ est un autre point fixe de ϕ , alors $\phi_n(0) \leq \zeta$ pour tout n .

e) En déduire que $\xi \leq \zeta$, puis que $\xi = \min\{x \in [0, 1] \mid \phi(x) = x\}$ et expliquer pourquoi cette quantité est bien un minimum.

On admettra que ϕ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, 1[$ et que

$$\forall 0 < t < 1, \quad \phi''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k t^{k-2}.$$

4) a) Montrer que $\phi''(t) > 0$ sur $]0, 1[$.

b) En déduire que $\phi(t) > m(t-1) + 1$ pour tout $t \in]0, 1[$.

c) Montrer que $\xi = 1$ si $m \leq 1$.

d) Si $m > 1$, montrer que $\xi < 1$. On pourra pour cela étudier le signe de $\phi(x) - x$ aux voisinages de 0^+ et de 1^- .

On note pour deux entiers naturels $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$: $\binom{n}{k} = n! / (k!(n-k)!)$. Par convention, $0! = 1$ et $C_n^k = 0$ si $k > n$.

5) On suppose que X suit une loi binomiale : $p_k = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $q \in (0, 1)$. Calculer ϕ dans ce cas. Calculer ξ en fonction de q dans le cas $n = 2$.

6) a) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}.$$

b) On suppose que X suit une loi binomiale négative, définie par : $p_k = \binom{k+n-1}{k} (1-q)^n q^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $q \in (0, 1)$. Calculer ϕ dans ce cas. En déduire m .

c) On suppose de plus que $n = 2$. Montrer que

$$(1-q)^2 = \xi(1-q\xi)^2.$$

En remarquant que 1 est solution de cette équation, montrer que ξ est solution d'une équation polynomiale d'ordre 2. En déduire ξ en fonction de q en distinguant les cas.

Deuxième partie : Un modèle déterministe pour la propagation des épidémies

On considère maintenant le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) &= -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) &= \gamma I(t), \\ S(0) &= S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0. \end{cases}$$

Ici, β , γ , S_0 et I_0 sont des réels strictement positifs.

On admettra qu'il existe une solution $(S(t), I(t), R(t))$ pour tous les temps $t \geq 0$.

- 7) Si $S(t)$ représente le nombre de personnes n'ayant pas encore contracté la maladie, $I(t)$ le nombre de personnes infectées et $R(t)$ le nombre de personnes guéries et désormais immunisées contre la maladie au temps t , expliquer brièvement en quoi ce système est pertinent pour décrire la propagation d'une épidémie et sous quelles hypothèses il est pertinent. Expliquer pourquoi, sous ces hypothèses, $1/\gamma$ peut-être interprété comme la période de contagiosité de chaque individu infecté.
- 8) a) Exprimer $S(t)$ en fonction de S_0 , β et $\int_0^t I(s)ds$. En déduire que $S(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
 b) De même, montrer que $I(t) > 0$ pour tout $t > 0$. En déduire que $R(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
 c) Montrer que $S + I + R$ ne dépend pas du temps. En déduire que ces quantités sont toutes bornées.
 d) Montrer que S et R convergent quand $t \rightarrow +\infty$, vers des quantités qu'on notera respectivement S_∞ et R_∞ . En déduire que I converge quand $t \rightarrow +\infty$, vers une quantité qu'on notera I_∞ .
- 9) a) Supposons que $S_\infty \geq \gamma/\beta$. Montrer qu'alors I est croissante et en déduire une contradiction.
 b) Montrer que $I_\infty = 0$.
 c) Tracer les tableaux de variations de S , I et R . On distinguera les cas $\beta S_0/\gamma \leq 1$ et $\beta S_0/\gamma > 1$.
- 10) a) Montrer que l'épidémie se propage, c'est-à-dire que le maximum de $t \mapsto I(t)$ sera strictement plus grand que I_0 , si et seulement si $\beta S_0/\gamma > 1$.
 b) Comparer ce critère à celui obtenu question 4.
- 11) Montrer que $\ln S - \frac{\beta}{\gamma}(S + I)$ ne dépend pas du temps.
- 12) a) En déduire une relation sur S_∞ , S_0 , I_0 , β et γ .
 b) En déduire que, si l'on considère S_∞ comme une fonction de I_0 , alors S_∞ est strictement décroissante en I_0 . Cela vous paraît-il logique ?
- 13) a) À l'aide de la relation déduite à la question 11, calculer le maximum de $t \mapsto I(t)$ en fonction de β , γ , I_0 et S_0 , dans le cas où $\beta S_0/\gamma > 1$.
 b) On suppose que $\beta S_0/\gamma = 4$, que $S_0 = 7 \times 10^7$ et que $I_0 = 1$. À l'aide de la relation $\ln 4 \simeq 1,4$, calculer une approximation du maximum de $t \mapsto I(t)/S_0$.

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) &= -\beta S(t)I(t), \\ E'(t) &= \beta S(t)I(t) - \alpha E(t), \\ I'(t) &= \alpha E(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) &= \gamma I(t), \\ S(0) &= S_0, E(0) = 0, \quad I(0) = I_0, R(0) = 0. \end{cases}$$

Ici, α , β , γ , S_0 et I_0 sont des réels strictement positifs.

On admettra qu'il existe une solution $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ pour tous les temps $t \geq 0$. On admettra également que $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ restent strictement positifs pour tous les temps $t > 0$.

14) a) Comment interpréter la quantité $E(t)$?

b) Étudier cette équation (on pourra commencer par tracer le tableau de variations de $t \mapsto E(t) + I(t)$). Trouver en particulier une condition garantissant la propagation de l'épidémie et calculer le maximum de $t \mapsto E(t) + I(t)$.

Fin de l'épreuve