Ecole Normale Supérieure de Lyon
Second Concours - Filière Universitaire
Session 2022
Rapport sur l'épreuve orale de Mathématiques

Examinateur : Thomas Budzinski

Déroulé de l'oral

Cette année, 9 candidats admissibles ont passé l'oral de mathématiques, dont 8 en majeure et 1 en mineure. Les notes vont de 9 à 16, avec une moyenne de 13 et un écart-type proche de 2. Les statistiques sur un si petit échantillon sur bien sûr très peu significatives.

La durée de l'épreuve orale est de 45 minutes. L'examinateur commence l'épreuve en donnant un exercice et n'intervient pas pendant les dix premières minutes afin de laisser le candidat réfléchir. La suite de l'oral est un dialogue autour de l'exercice avec l'examinateur, qui peut donner des indications ou poser des questions de cours reliées. À une dizaine de minutes de la fin, le premier exercice est interrompu pour en poser un second, portant sur un domaine différent du premier. Le premier exercice est généralement difficile, et il n'est nullement nécessaire de le résoudre entièrement pour obtenir une excellente note. Le second est plus court et plus standard. La prise d'initiative, la réactivité des candidats et la maîtrise des objets du cours qui apparaissent au cours de la discussion sont des facteurs plus importants dans l'évaluation que l'avancée dans les exercices.

Le niveau des candidats était globalement assez homogène, avec des points forts et des points faibles différents selon les candidats. Parmi les points de cours qui ont pu poser problème à certains candidats, signalons le théorème de Cauchy–Lipschitz, les hypothèses précises des théorèmes d'interversion ou encore le calcul de la variance d'une loi binomiale. Enfin, rappelons tout de même que tester de petites valeurs ou des cas particuliers simples est très souvent un bon réflexe pour aborder un exercice difficile.

Quelques exercices posés au cours de l'oral

Exercices longs

Exercice 1. Soit f une fonction continue intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle

$$x''(t) + f(t)x(t) = 0$$

admet au moins une solution non bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Éléments de solution. Si x est une solution bornée, alors $f \times x$ est intégrable donc f'' aussi donc f' admet une limite en $+\infty$. Comme f est bornée, cette limite vaut 0. D'autre part, par Cauchy–Lipschitz, les solutions de f forment un espace vectoriel de dimension 2. Soit (x_1, x_2) une base, et soit $w = x_1' x_2 - x_1 x_2'$ leur Wronskien (cette indication était donnée par l'examinateur). On calcule $w' = 0$, donc w est constante. Comme (x_1, x_2) est libre, on a $w(0) \neq 0$, mais si x_1 et x_2 sont bornées alors $w(t) \to 0$ en $+\infty$, d'où la contradiction.

Exercice 2. Soient $n \geq 1$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la matrice $P(M)$ est soit inversible soit nulle. Que peut-on dire de M ?

Éléments de solution. Le même problème dans $\mathbb{C}$ est plus simple : soit λ une valeur propre de M. Alors $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible, donc elle est nulle, donc M est une homothétie. Pour le problème réel, soit λ une valeur propre complexe de M. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le même raisonnement montre que $M = \lambda I_n$. Sinon, $P = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$ est un polynôme réel, et $P(M)$ n'est pas inversible, donc $P(M) = 0$, donc M est annulée par un polynôme réel irréductible de degré 2. Réciproquement, si M est annulée par un tel polynôme P, soit $S \in \mathbb{R}[X]$. On écrit la division euclidienne $S = PQ + R$ de S par P. Alors $S(M) = R(M)$ avec R de degré au plus 1, et $R(M)$ est soit nulle (si $R = 0$), soit inversible (car M n'a pas de valeur propre réelle).

Exercices courts

Exercice 3. Soient (X_i) des variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, et soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On note

$$T = \min\{n \text{ tel que } |S_n| \geq 2\}.$$

Décrire la loi de T.

Éléments de solution. On a $\mathbb{P}\left(T = 2k\right) = \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \geq 1$ et $\mathbb{P}\left(T = 2k - 1\right) = 0$. En effet, S_n a toujours la parité de n donc T doit être pair. De plus, conditionnellement à $T > 2k$, on a $S_{2k} = 0$, donc

$$\mathbb{P}\left(T = 2k + 2 | T > 2k\right) = \frac{1}{2},$$

ce qui suffit à faire le calcul.

Exercice 4. Soient $n \geq 2$ et $a_2, \ldots, a_n$ et $b_2, \ldots, b_n$ des nombres complexes. À quelle condition la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Éléments de solution. On calcule le polynôme caractéristique : on trouve $X^n - \left(\sum_{i=2}^n a_i b_i\right) X^{n-2}$. Si $\sum a_i b_i = 0$, alors la seule valeur propre est 0, donc la matrice n'est diagonalisable que si les coefficients sont tous nuls. Si $\sum a_i b_i \neq 0$, alors on a deux valeurs propres $\pm\sqrt{\sum a_i b_i}$. Par ailleurs, la matrice est de rang au plus 2, donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-2$, donc la matrice est diagonalisable.