Rapport de l'épreuve d'Oral des Ponts 2022 – Filière BCPST

École des Ponts
ParisTech

1. PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE

L'épreuve d'Oral de Mathématiques de l'école des Ponts (concours BCPST) dure 50 minutes et est précédée de 15 minutes de préparation. Elle consiste en deux exercices permettant de balayer une vaste partie du programme de Mathématiques des 2 années de classe préparatoire. Elle ne comporte pas d'Informatique. Quelle qu'ait été la préparation du candidat, les deux exercices seront abordés pendant l'oral, permettant ainsi au jury de juger aussi le candidat sur sa réactivité face à des questions nouvelles auxquelles il n'aura pas eu le temps de réfléchir pendant les 15 minutes de préparation.

On attend du candidat qu'il sache traiter d'emblée des questions classiques et faisant appel aux méthodes du cours. En revanche il est légitime sur des questions plus difficiles qu'il soit amené à réfléchir et à proposer des pistes qui n'aboutiront pas, du moment qu'elles sont cohérentes et justifiées par rapport à l'exercice, et démontrent à la fois une bonne connaissance du cours et un esprit d'initiative. Le jury rappelle que son rôle est d'évaluer afin de classer, ce qui l'amène à interroger les candidats. Cet oral n'est pas un « écrit au tableau » mais bien un dialogue pertinent sur les Mathématiques.

2. REMARQUES DU JURY

2.1. Algèbre

Le cours sur la réduction est globalement su et maîtrisé, nous notons toutefois des confusions entre différentes définitions (caractère inversible et diagonalisable d'une matrice par exemple). En revanche, les candidats ont toujours des difficultés à manier les complexes. Enfin, les questions de calculs (de sommes de séries par exemple) ont été très discriminantes : elles sont parfois brillamment traitées, alors que d'autres candidats peinent à calculer une simple somme de termes géométriques. Nous invitons les candidats à ne pas négliger l'aspect calculatoire d'un exercice.

2.2. Analyse

Les candidats sont peu à l'aise avec l'utilisation des valeurs absolues.

Encore cette année, nous notons des maladresses dans l'application du critère de comparaison pour les séries et les intégrales impropres : les candidats ont tendance à écrire directement des inégalités de sommes partielles (parfois même de sommes de séries) ou d'intégrales généralisées avant même de justifier leur existence. Le calcul intégral, notamment l'intégration par parties et le changement de variable, y compris pour les intégrales généralisées, est plutôt bien maitrisé chez les candidats interrogés.

2.3. Probabilités

Il faut connaître les définitions des objets manipulés : variable aléatoire, événement. Ne pas confondre événement et probabilité de cet événement. Il faut aussi se préoccuper de la nature des variables aléatoires manipulées (discrète ou à densité), les exercices mêlant les deux types de variables aléatoires sont souvent peu réussis. Les lois usuelles du programme, et leurs caractéristiques, sont souvent bien maitrisées.

Être méthodique dans la mise en place des exercices de probabilités (par exemple, penser à donner le support d'une variable aléatoire même s'il n'est pas explicitement demandé ou encore écrire clairement le système complet d'évènements associé à une formule des probabilités totales), est nécessaire pour pouvoir rédiger un exercice probabiliste de manière satisfaisante.

2.4. Forme & Conclusion

Nous conseillons tout de même aux candidats d'éviter de cacher systématiquement le tableau au jury pendant ses calculs, en lui tournant le dos. Mais de manière générale, les étudiants sont bien préparés, ont une attitude volontaire pour avancer et tiennent compte des indications données. Le tableau est souvent bien organisé.

Deux exemples de sujets sont donnés à la suite de ce rapport.

Consignes Vous commencerez par exposer le premier exercice. La préparation dure 15 minutes, l'exposé 50 minutes.

Pour tout problème de compréhension de notation, ne pas hésiter à m'appeler.

Ne rien écrire sur le sujet.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 | (Solution : ??) Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$.

1. Soient U et V deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2. On rappelle qu'alors UV possède une espérance. En considérant la quantité $\mathbf{E}\left((\lambda \mathrm{U}+\mathrm{V})^2\right)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, montrer l'inégalité suivante :

$$(\mathbf{E}(\mathrm{UV}))^2 \leqslant \mathbf{E}\left(\mathrm{U}^2\right) \mathbf{E}\left(\mathrm{V}^2\right).$$

2. On considère une variable aléatoire X à valeurs positives, qui n'est pas quasi certaine et qui possède une variance. On désigne par α un réel de $[0,1]$. On admet que $\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right) \neq 0$ et on note $(\star)$ l'inégalité :

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}>\alpha \mathbf{E}(\mathrm{X})) \geqslant(1-\alpha)^2 \frac{(\mathbf{E}(\mathrm{X}))^2}{\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right)}. \quad (\star)$$

2.1) Que devient $(\star)$ si X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}$ et $p \in [0,1]$?

2.2) En déduire que : $(1-p)^{n-1} \leqslant \frac{1}{(n-1)p+1}$.

3. On souhaite démontrer $(\star)$ dans cette question. On note Y la variable aléatoire indicatrice de l'événement $\{\mathrm{X}>\alpha \mathbf{E}(\mathrm{X})\}$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Y}=\begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{X}>\alpha \mathbf{E}(\mathrm{X}), \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

3.1) Écrire l'espérance de Y en fonction de X et α.

3.2) Vérifier l'inégalité : $\mathrm{X} \leqslant \alpha \mathbf{E}(\mathrm{X})+\mathrm{XY}$.

3.3) Conclure.

Exercice 2 | (Solution : ??) On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathrm{J}=]-1,\infty[$ à valeurs réelles. Soit $p \in \mathbf{N}$, on définit pour tout $k \in [\![-1\,,\,p]\!]$, les fonctions f_k par :

$$\forall x \in \mathrm{J}, \quad f_{-1}(x)=\ln(1+x), \quad \forall k \in [\![0\,,\,p]\!], \quad f_k(x)=\frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. 1.1) Montrer que $\mathscr{B}=(f_k)_{k \in [\![-1\,,\,p]\!]}$ est une famille libre. On notera dans la suite $\mathrm{E}=\operatorname{Vect} \mathscr{B}$.

1.2) Que vaut $\dim \mathrm{E}$?

2. On note u l'application

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ f & \longmapsto & u(f) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad u(f): x \in \mathrm{J} \longmapsto (1+x) f'(x).$$

2.1) Déterminer $u(f_k)$ pour tout $k \in [\![-1\,,\,p]\!]$, en déduire que u est un endomorphisme de E.

2.2) Déterminer son noyau et son image.

2.3) Déterminer $\underset{\mathscr{B}}{\mathscr{M}\mathrm{at}}(u)$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Sujet 14

Vous commencerez obligatoirement par exposer le premier exercice.

Exercice 1

Soit $F : x \to \dfrac{1}{e^{-x}+1}$.

1. F est-elle la fonction de répartition d'une variable à densité ?

   Si Oui, donner une densité f.

2. On définit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.
   (a) Montrer que X admet des moments à tout ordre.
   (b) Déterminer l'espérance de X.

3. On définit g telle que $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
   (a) Montrer que g définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.
   (b) On pose $Y = g(X)$. Montrer que la loi suivie par Y est une loi uniforme.
   (c) Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 2

Soit n un entier non nul et (E_n) l'équation d'inconnue x :

$$(E_n) \quad 1 + \ln(x+n) = x$$

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x - \ln(n+x) - 1$.

1. Pour n fixé supérieur ou égal à 1, montrer que (E_n) admet une unique solution a_n sur $\mathbb{R}^+$.

2. Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

3. Pour n assez grand, et en déterminant le signe de $f_n(n)$ puis de $f_n(\ln n)$, comparer pour la relation d'ordre les trois réels n, $\ln n$ et a_n.

4. En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. (a) Déterminer une constante C telle que les suites (a_n) et $(C \ln n)$ soient équivalentes.
   (b) Déterminer un équivalent simple de e^{a_n}.

6. Montrer que la suite $(a_n - C\ln n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite ℓ.