BANQUES MP INTER-ENS - SESSION 2022

RAPPORT DU JURY DE L'ÉPREUVE ORALE MATHS LYON

École concernée : ENS de Lyon

Coefficent (en pourcentage du total d'admission) : 16,2%

1. Statistiques sur le concours

L'épreuve orale "Maths-Lyon" correspond à $15,7\%$ du total de toutes les épreuves du concours MP-MPI pour l'ENS de Lyon. Les différentes statistiques de l'épreuve sont résumées dans l'histogramme ci-dessous.

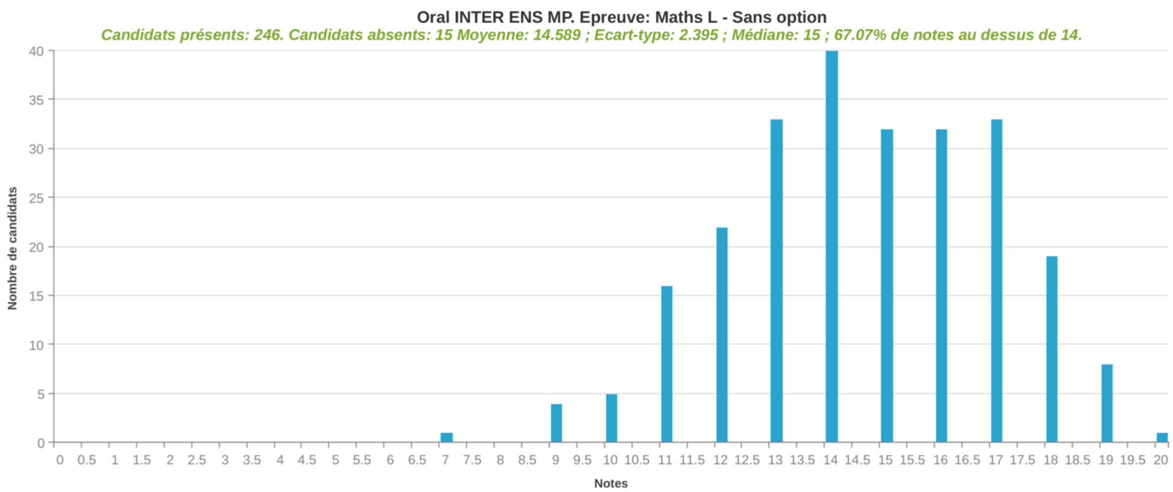

Figure 1. Histogramme des notes

2. Déroulement du concours

Le jury du concours était composé de trois enseignants-chercheurs. L'épreuve dure 45 minutes sans préparation. Elle se compose d'un ou deux exercices (généralement un seul). L'énoncé de l'exercice est dicté et les candidates doivent retranscrire l'énoncé au tableau. C'est une étape importante, la concision, le choix des notations pouvant être un élément d'appréciation de l'oral. Le candidat ne doit pas hésiter à demander s'il n'est pas sûr de l'énoncé pour lever toute ambiguïté. La candidate peut choisir de prendre quelques minutes de réflexion ou d'instaurer tout de suite le dialogue. Si le candidat bloque, au bout de quelques minutes l'examinatrice lui pose des questions intermédiaires ou donne des indications et le dialogue se poursuit tout au long de l'examen. Chaque exercice est donné parallèlement et consécutivement aux candidats. Après deux sessions de 45 minutes le jury se réunit et délibère sur les résultats de ces sessions. Ceci permet éventuellement de compenser la difficulté d'un exercice et d'harmoniser la notation.

3. Esprit des exercices

Les exercices sont généralement difficiles et leurs énoncés relativement courts. C'est le moment où la candidate décrit son intuition et propose une stratégie de résolution. Ensuite, l'examinateur propose des questions précises ayant une réponse courte, qui guide dans la résolution. Parfois, les premières questions sont plus faciles et permettent de se familiariser avec le contexte. Dans tous les cas, l'exercice est un prétexte à une discussion mathématique entre les candidates et le jury. Durant l'oral, le jury vérifie les connaissances du programme. Le jury valorise les initiatives des candidats, les réactions aux indications et les réponses aux questions intermédiaires plus que la résolution de l'exercice en elle-même. Les exercices que le jury a choisi sont issus souvent d'articles de recherche ou de discussions entre chercheurs qui n'ont pas été rédigées. Cela a comme conséquences que les hypothèses ne sont pas minimales pour obtenir la conclusion ou que les questions peuvent ouvrir sur une discussion relativement ouverte. Les candidats ne doivent pas se laisser intimider par la difficulté de l'énoncé, ils seront notés selon la difficulté de la question : on peut avoir 19 sans avoir résolu l'exercice et 13 en ayant tout fait.

Nous rappelons qu'une attitude qui peut porter ses fruits devant un énoncé difficile est de prendre des cas particuliers (si l'énoncé demande de montrer une propriété pour tout n, commencer par le faire pour n=1 ou 2) de renforcer les hypothèses (si l'énoncé demande de montrer un résultat pour une fonction continue, on peut commencer par la supposer C^1 ou en escaliers suivant le contexte,...) et de faire des dessins (dessiner des fonctions convexes, des produits cartésiens d'ensemble,...). La plupart des candidates savent qu'il faut prendre des cas particuliers, des exemples et faire des analogies. Mais il reste des candidats qui ne le font pas.

4. Remarques spécifiques

Les candidats de l'épreuve "Maths Lyon" ont été en grande partie très bien préparés, les notions de cours étant maîtrisées par plus grande partie des candidats. Par exemple, on peut discuter les chapitres suivants:

> Algèbre linéaire : très bien maîtrisée, notamment sur le calcul matriciel. Attention toutefois, au changement de base pour un endomorphisme, si on écrit $M = PDP^{-1}$ ou $M = P^{-1}DP$, alors on doit savoir expliciter P (matrice de changement de bases de quoi vers quoi?), voir des exemples numériques est conseillé.
>
> Arithmétique et algèbre abstraite: relativement discriminatoire, les candidats ont une aisance différente selon la pratique de chacun. Notons par exemple le fait qu'on peut faire une "division euclidienne" par un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$. L'énoncé du ''lemme chinois" n'a parfois pas pu être restitué.. La démonstration de l'existence du polynôme minimal n'est parfois pas maîtrisée. Pour montrer qu'une partie d'un anneau est un idéal on peut montrer que c'est le noyau d'un morphisme d'anneaux mais on doit parfois revenir à la définition.
>
> Théorème de continuité sous l'intégrale, intervention limite-série, convergence uniforme etc. : également discriminatoire, les candidates connaissent bien les théorèmes mais on a des niveaux très variés de pratique.
>
> Calcul différentiel: le chapitre avait posé problème par le passé, mais est bien traité cet année.
>
> Equations différentielles: Lors de la résolution de systèmes différentiels de taille n>1, les candidates ont parfois été amenées à écrire des produits vecteurs colonnes fois

matrice $y(t) = y(0)exp(tA)$! Les candidats ne pensent pas forcément à utiliser la réduction des matrices pour exprimer une exponentielle ce qui devrait être un réflexe.

Exemples de fonctions continues en un point, qui n'est pas continue par morceaux: bien connu par tous les candidats; le faible nombre qui fait des erreurs attire plus l'attention que ceux qui font des erreurs sur le programme de MP.

Probabilités : le programme se prête bien à des exercices de modélisation où l'on reconnaît les variables aléatoire du problème comme ayant des lois connues : Bernoulli, géométrique etc.

5. Sur le "hors-programme"

Aucune connaissance hors-programme n'est attendue pour cette épreuve. Certains résultats ou exercices vus dans certaines classes préparatoires ont pu être utilisés par les candidats pour la résolution du problème posé pendant l'oral. La candidate s'expose ainsi à une question sur la démonstration de ces résultats et la restitution approximative d'une démonstration déjà vue ne la favorise pas. Le jury tient compte des différences de préparation des candidates sur les points dans l'adhérence du programme. Si la preuve la plus naturelle et la plus simple d'un résultat mathématique utilise un résultat "hors-programme", le jury va demander au candidat de prouver ce résultat intermédiaire. La plupart des candidats réagissent comme devant des exercices quelconques et trouvent seuls la preuve, qui est souvent courte. Une réaction à éviter est de dire que ce n'est pas au programme et de refuser de chercher la preuve car elle est écrite quelque part dans un livre.

6. Exemples d'exercices donnés

Exercice 1. (Inégalité de Wielandt) *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit que A est positive si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, on note alors $A \geq 0$. Pour A dans $S_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $a, b > 0$ qui vérifient $aI \geq A \geq bI$ et pour deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle x, y\rangle = 0$ montrer que*

$$|\langle x, Ay\rangle|^2 \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \langle x, Ax\rangle\langle y, Ay\rangle. \tag{6.1}$$

Exercice 2. (Le collectionneur de coupons)

(1) On appelle loi géométrique de paramètre p la variable aléatoire $\mathcal{G}(p)$ telle que
$$P(G(p) = k) = (1-p)^{k-1}p.$$
C'est la loi du nombre de tirages à faire avant succès quand chaque tirage est, $\mathcal{B}(p)$, une Bernoulli de paramètre p. Calculer $\mathbb{E}(\mathcal{G}(p))$.

(2) Une boîte contient n coupons. Un collectionneur tire uniformément des coupons dans la boîte. Un coupon tiré est remis. Quelle est l'espérance du nombre de tirages avant d'avoir vu tous les coupons ?[1]

(3) On note $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ le corps à 5 éléments. On tire uniformément des vecteurs dans $\mathbb{F}^n$. Quelle est l'espérance du nombre de tirages avant d'obtenir un système de générateurs de $\mathbb{F}^n$?

[1]Certaines campagnes commerciales offrent des autocollants de footballeurs à l'achat d'un paquet. Si on a tous les autocollants on peut envoyer le cahier et on reçoit un prix. Combien de paquets faut-il acheter pour trouver 100 autocollants ?

Exercice 3. (Sur un opérateur de Riesz)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, on considère l'expression suivante pour $t \in \mathbb{R}$

$$I_t(f)(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta)}{(1-\cos(\theta-\varphi))^{\frac{1}{2}-t}} d\theta.$$

1) Pour quel t pouvez vous définir I_t? (Question ouverte, on attend $t > 0$).
2) Calculer $I_t(1)(\varphi)$ pour tout φ.
3) Montrer que $I_t(f)$ est continue.

Les questions suivantes ont été posées dans une autre session d'exercice.

4) Montrer que $\|I_t(f)\|_2 \leq C\|f\|_2$ pour $t > 0$.
5) Montrer que la forme sesquilinéaire $\langle I_t(f), f\rangle$ est positive pour certains $t > 0$.