ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2022

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve se compose d'un problème en 3 parties. Les trois parties sont indépendantes.

La première partie démontre un principe d'incertitude en dimension finie, dont l'analogue en dimension infinie stipule en particulier qu'une fonction non identiquement nulle et sa transformée de Fourier ne peuvent pas toutes les deux s'annuler trop souvent.
La deuxième partie étudie quelques exemples d'une classe de matrices particulières, les matrices k-Hadamard, qui sont des matrices auxquelles s'appliquent les résultats de la première partie.
La troisième partie étudie les propriétés probabilistes de matrices aléatoires, candidates potentielles pour être k-Hadamard.

Problème

Dans ce problème, n désigne un entier naturel. Si a et b sont deux entiers, on note $[\![a, b]\!] = [a, b] \cap \mathbb{N}$.
L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni des trois normes définies par

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|.$$

On rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Partie I. Un principe d'incertitude.

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\|A\|_{1,\infty} = \sup\limits_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1}$.

1. Montrer que
$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$$
et que $\|\ \|_{1,\infty}$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$. On dit que $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ est k-Hadamard si :

$$\|A\|_{1,\infty} \leqslant 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{C}^n,\ \|A^* A x\|_\infty \geqslant k\|x\|_\infty$$

où l'on a noté $A^* = {}^t\bar{A} = (\overline{a_{j,i}})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

2. Montrer que si A est k-Hadamard, alors
$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|_1 \|Ax\|_1 \geqslant k\|x\|_\infty \|Ax\|_\infty.$$
On pourra observer que $\|A^*\|_{1,\infty} = \|A\|_{1,\infty}$.
3. Montrer que si A est k-Hadamard, alors
$$\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},\ |\mathrm{Supp}(x)| \times |\mathrm{Supp}(Ax)| \geqslant k$$
où l'on a noté $\mathrm{Supp}(x) = \{j \in [\![1, n]\!] \mid x_j \neq 0\}$ et $|\mathrm{Supp}(x)|$ le cardinal de $\mathrm{Supp}(x)$.

4. Soit $s \ : [\![1,n]\!] \to \mathbb{C}$ une fonction. On note $\hat{s} \ : [\![1,n]\!] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \hat{s}(j) = \sum_{l=1}^{n} s(l) e^{-2i\pi jl/n}.$$

   (a) Déterminer une matrice $F_n \in M_n(\mathbb{C})$ telle que pour toute fonction $s \ : [\![1,n]\!] \to \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} \hat{s}(1) \\ \vdots \\ \hat{s}(n) \end{pmatrix} = F_n \cdot \begin{pmatrix} s(1) \\ \vdots \\ s(n) \end{pmatrix}.$$

   (b) Calculer $F_n^* F_n$.

   (c) En déduire que pour toute fonction $s \ : [\![1,n]\!] \to \mathbb{C}$,

$$|\mathrm{Supp}(s)| \times |\mathrm{Supp}(\hat{s})| < n \Rightarrow s = 0$$

   où $\mathrm{Supp}(s) = \{j \in [\![1,n]\!] \mid s(j) \neq 0\}$ et $\mathrm{Supp}(\hat{s}) = \{j \in [\![1,n]\!] \mid \hat{s}(j) \neq 0\}$.

5. *Cette question est indépendante des précédentes.*
   Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. On suppose qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\mathrm{Supp}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\} \subset [-A, A].$$

   On définit alors $\hat{f} \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} \,\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $\hat{f}$ est développable en série entière en 0, de rayon de convergence égal à $+\infty$.

   (b) On suppose de plus qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-A}^{A} f(t) t^n \,\mathrm{d}t = 0$.
   En déduire que f est la fonction nulle.

Partie II. Exemples de matrices k-Hadamard réelles.

Dans cette partie, toutes les matrices sont à coefficients réels.
Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$. On dit que $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ est k-Hadamard si :

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|{}^tAAx\|_\infty \geqslant k\|x\|_\infty.$$

1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est k-Hadamard, alors $k \leqslant n$.
2. Montrer que pour toute $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et montrer que toutes ses valeurs propres sont $\geqslant 0$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice n-Hadamard.
   (a) Montrer que $\mathrm{tr}({}^tAA) \leqslant n^2$.
   (b) Montrer que toute valeur propre de ${}^tAA$ est $\geqslant n$.

(c) En déduire que ${}^tAA = nI_n$ et que : $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = \pm 1$.

4. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $k > 0$ tels que $\|A\|_{1,\infty} \leqslant 1$ et ${}^tAA = 2kI_n + J_n$ où J_n est la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

   (a) Montrer que A est k-Hadamard.

   (b) Construire une telle matrice avec $n = 3$, $k = 1/2$ et dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1.

Partie III. Normes d'opérateur de certaines matrices aléatoires.

On note :

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}.$$

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note

$$\|A\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \|Ax\|_2.$$

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

   (a) Montrer que
   $$\|A\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} |{}^txAx| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$
   où $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A.

   (b) On suppose dans cette question que les coefficients de A sont bornés par 1. Montrer que $\|A\|_2 \leqslant n$ et caractériser le cas d'égalité.

Dans toute la suite, on suppose que $A = (\varepsilon_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice symétrique réelle dont les coefficients supérieurs $(\varepsilon_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ forment une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$:

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\varepsilon_{i,j} = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_{i,j} = 1) = 1/2.$$

Le but des questions suivantes est de montrer que $\|A\|_2 \underset{n \to +\infty}{=} O(\sqrt{n})$ avec une grande probabilité, ce qui améliore fortement le résultat de la question (1b).

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé.

   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) \leqslant e^{t^2/2}$.

   (b) Pour $u \in \mathbb{R}^+$, exprimer l'espérance $\mathbb{E}\big(e^{u\,{}^txAx}\big)$ sous la forme d'un produit de cosinus hyperboliques faisant intervenir u et les composantes du vecteur x.

   (c) En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{E}\big(e^{u\,{}^txAx}\big) \leqslant e^{u^2\|x\|_2^4}$.

   (d) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}\big({}^txAx \geqslant \alpha\sqrt{n}\big) \leqslant e^{-u\alpha\sqrt{n} + u^2\|x\|_2^4}$.

   (e) En déduire que pour tout $\alpha > 0$,
   $$\mathbb{P}\big({}^txAx \geqslant \alpha\sqrt{n}\big) \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha^2 n}{4\|x\|_2^4}\right) \text{ puis que } \mathbb{P}\big(|{}^txAx| \geqslant \alpha\sqrt{n}\big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\alpha^2 n}{4\|x\|_2^4}\right).$$

Afin de traiter la dernière question de ce problème, on admet qu'il existe un entier N tel que $N \leqslant 7^n$ et des vecteurs $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{S}^{n-1}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{S}^{n-1},\ \exists k \in [\![1, N]\!],\ \|x - v_k\|_2 \leqslant 1/3.$$

3. On note $M_A = \max\limits_{k=1,\dots,N} |{}^t v_k A v_k|$.

   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{S}^{n-1},\ |{}^t x A x| \leqslant \dfrac{7}{9}\|A\|_2 + M_A$.

   (b) En déduire que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}\big(\|A\|_2 \geqslant t\big) \leqslant \mathbb{P}\big(M_A \geqslant 2t/9\big)$.

   (c) A l'aide des questions précédentes, déterminer un réel $\alpha > 0$, indépendant de n, tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\|A\|_2 \geqslant \alpha\sqrt{n}\big) = 0.$$