Banque MP inter-ENS – Session 2022

Rapport relatif à l'épreuve orale de mathématiques

- **Ecoles partageant cette épreuve :**
  ENS Paris-Saclay, ENS Rennes
- **Coefficients** (en pourcentage du total des points de chaque concours) **:**
  - ENS Paris-Saclay
    - Concours MP Option MP : 23,1 %
  - ENS Rennes
    - Concours MP Option MP : 23,1 %
- **Membres du jury :**
  Q. Berger, L. Devin, R. Tesson, T. Simon

Déroulement de l'épreuve

Cette année, 273 candidats et candidates ont passé l'oral de mathématiques spécifique pour les Écoles Normales Supérieures de Rennes et Paris-Saclay. Il s'agit d'un oral sans préparation, d'une durée de 45 min, constitué d'un exercice qui commence en général par une question simple ou proche du cours —voire une démonstration au programme officiel —et comporte la plupart du temps plusieurs questions intermédiaires ou indications prévues pour êtres fournies au cours de la réflexion du candidat. Les premières minutes de l'examen sont dédiées à un travail en autonomie du candidat durant lesquelles l'examinateur n'intervient pas du tout. Cela a pour but de permettre au candidat de s'approprier l'exercice en pleine concentration. Il est conseillé au candidat de ne pas hésiter à utiliser le tableau avec abondance lors de cette première phase, y compris dans une approche de brouillon. Il n'est tenu aucune rigueur au candidat de raisonnements ou résultats faux écrits durant cette phase du moment qu'ils soient corrigés lors de la restitution orale. La suite de l'oral prend la forme d'une discussion avec le jury durant laquelle ce dernier intervient pour aiguiller ou questionner le candidat, que ce soit sur l'exercice ou bien sur une notion connexe. À quelques rares exceptions près, les exercices n'ont été posés que deux fois durant toute la durée des oraux, sur deux interrogations successives, et à trois candidats en parallèle.

Sont évalués à la fois la méthode, la rigueur, la connaissance du cours et les compétences techniques, mais aussi l'autonomie, le dynamisme et les capacités de communication. Il va sans dire qu'on ne peut que déconseiller aux futurs candidats et candidates de négliger un de ces points lors de leur préparation. En revanche, le jury n'évalue que très peu la capacité à trouver une solution astucieuse et épiphanique à un exercice : un candidat ou une candidate avançant à son rythme et avec rigueur vers la résolution du problème, en proposant de résoudre des cas particuliers bien choisis ou des résultats intermédiaires, et capable de rebondir sur les indications de l'examinateur, se verra attribuer une excellente note.

À l'abord d'une nouvelle question, le jury laisse au candidat le temps de creuser une piste et de réfléchir, puis rapidement une discussion s'engage avec le jury. Selon les situations, cette discussion peut prendre plusieurs formes : l'examinateur peut demander des éclaircissements ou des corrections mineures sur la preuve proposée, une synthèse de l'idée de preuve ou au contraire, réclamer une rédaction plus précise et rigoureuse des arguments précédemment fournis par le candidat.

Évaluation générale des candidats

Le jury s'accorde à dire que l'ensemble des admissibles est de bon niveau, avec une connaissance approfondie du cours, de nombreux réflexes mathématiques et des qualités en calcul. On observe de temps en temps des personnes plus sensibles au stress ou qui semblent perdre courage au fur et à mesure de l'oral. Nous rappelons donc à l'ensemble des admissibles que les questions du jury sont là pour aider à avancer dans l'exercice, que chaque année des candidats font de très bons oraux après un départ laborieux, et qu'il ne faut pas chercher à interpréter la discussion avec le jury, les exercices étant très différents les uns des autres. Bien sûr, le but du jury n'est en aucun cas de piéger les candidats, par ailleurs déjà assez sujets au stress : si l'un d'eux se voit demander s'il est sûr de ce qu'il vient d'affirmer, c'est probablement parce que l'interrogateur ou l'interrogatrice pense que c'est faux (ou alors qu'il n'est pas bien certain, au vu du ton du candidat, si ce qui vient d'être dit est une affirmation ou bien une question).

Comme les années précédentes, nous avons noté que de nombreux candidats ne pensent pas à appuyer leur réflexion sur des dessins qui se révèlent parfois un soutien indispensable à la résolution d'un exercice et qui est, dans tous les cas, d'une grande aide pour clarifier son propos. Les formules de Taylor sous toutes leurs formes semblent mal maîtrisées par de trop nombreux candidats. De manière générale, le jury s'est étonné que certains candidats semblent maîtriser des notions largement hors-programme mais se retrouvent démunis face à des questions plus élémentaires, y compris en algèbre linéaire. Le jury note également de grosses disparités de niveau concernant les structures algébriques abstraites. Si des connaissances pointues et hors programme ne sont ni attendues, ni utiles dans le cadre de ces oraux, il reste nécessaire de maîtriser les bases du programme, à commencer par l'indicatrice d'Euler. De la même façon, si de bonnes connaissances et réflexes en algèbre linéaire sont constatés, certaines manipulations de la notion de valeur propres sont parfois encore hésitantes.

Conseils pour les futurs admissibles

Ces conseils recoupent en grande partie ceux des années précédentes.

- On voit trop de candidats refuser de rédiger leurs preuves et se contenter d'en répéter l'idée générale, malgré l'insistance du jury. Si l'exposé de la stratégie de preuve est apprécié par le jury, sa mise en œuvre se révèle souvent plus délicate qu'il n'y paraît. Il faut donc rédiger proprement une preuve, vérifier les hypothèses des théorèmes, éventuellement énoncer des résultats intermédiaires, etc. Faire manifestement preuve de réticence à écrire son raisonnement au tableau a été systématiquement sanctionné.
- De même, malgré l'insistance parfois pressante du jury, certains candidats rechignent à écrire proprement les hypothèses des questions au tableau, et plus généralement tout ce qui ne relève pas de la formule mais fait quand même partie intégrante du langage mathématique : connecteurs logiques, quantificateurs, etc. Inutile de dire que c'est une très mauvaise idée. En premier lieu, cela permet, à tout moment, de retrouver l'énoncé précis du résultat auquel on souhaite aboutir, et d'isoler les hypothèses utiles à chaque étape du raisonnement. Ensuite, cela permet de réutiliser dans la suite de la planche les questions déjà traitées (ce qui est en somme assez courant). Enfin, ne pas faire ce que demande le jury démontre soit une capacité de communication limitée, soit une témérité quelque peu inattendue lors d'une épreuve orale. Notons que la gestion du tableau est une compétence évaluée, au moins indirectement, par le jury : des candidats se sont retrouvés bloqués au cours de la planche du fait d'avoir effacé une partie de leurs résultats, et ce malgré les protestations de l'interrogateur. D'autres ont perdus un temps précieux à réécrire plusieurs

fois des raisonnements déjà effectués en questions précédentes mais effacés instantanément. Se forcer à présenter correctement son tableau, c'est aussi s'assurer d'avoir à tout moment la structure de l'exercice en tête.

- Certains candidats ne tiennent pas compte des pistes fournies par l'examinateur au cours de l'épreuve. Le but du jury n'est pas d'embrouiller le candidat ou de le lancer sur de fausses pistes, mais bien de le guider dans la résolution d'exercices parfois difficiles. Ces pistes même si elles n'évoquent rien immédiatement au candidat doivent néanmoins faire l'objet d'investigation.
- De manière similaire, la première question de l'exercice fournit, dans bon nombre de cas, une indications devant être utilisée dans la suite de l'exercice. Lorsqu'il est demandé de rappeler une formule ou un théorème au début de l'exercice, il est fort probable que cela intervienne dans la suite de l'exercice et il est assez regrettable que certains candidats ne songent alors pas à exploiter cette première question. A contrario, certains candidats cherchent par tous les moyens à traiter la question 2 à l'aide de la question 1. Les questions ne sont pas nécessairement imbriquées les unes dans les autres. Il est davantage attendu du candidat qu'il adopte une posture de recherche active en réfléchissant au problème qui lui est posé plutôt que d'essayer de faire intervenir artificiellement un résultat préliminaire.
- À tout moment de l'oral le jury peut être amené à poser des questions très simples autour du cours ou de cas particuliers. C'est tout à fait normal et cela ne présage en rien de la réussite de la personne interrogée, mais vise à évaluer de manière la plus complète possible son oral. Cela peut aussi constituer une indication (à demi) cachée pour la résolution de l'exercice, que ce soit par l'utilisation directe de la propriété demandée ou bien de son idée de preuve. Certains candidats ont été mis en défaut sur ces questions. Il est crucial de rappeler que le cours doit être maîtrisé.
- Le jury apprécie grandement les candidats et candidates qui, lorsqu'ils sèchent sur une question, proposent d'eux même de considérer des cas simples (le plus souvent il s'agit de traiter le cas n=2 avant de s'attaquer à des n quelconques, que n soit une dimension, une régularité, un cardinal ou un paramètre). Il est assez rare que les personnes interrogées osent simplifier un énoncé difficile, or quand elles le font l'initiative est souvent couronnée de succès et débouche sur une preuve générale. Lorsqu'une telle simplification devient triviale et ne permet pas d'avancer sur le cas général, le jury apprécie aussi que les candidats s'en rendent compte d'eux-mêmes.
- Au contraire, certains candidats essaient de résoudre la question posée en cherchant exhaustivement une astuce qui permettrait une solution immédiate et lucrative en termes de note finale. Comme nous l'avons déjà dit, nous ne cherchons pas à évaluer ce type de compétences. Les exercices proposés ne sont pour ainsi dire jamais « à astuce », mais demandent une certaine imprégnation de l'énoncé et des notions mises en jeu (à l'instar de presque tous les problèmes de recherche). Ils nous permettent de tester des qualités qui feront des futurs normaliens et normaliennes de bons enseignants et de bonnes chercheuses : compréhension profonde des objets manipulés (qui constitue un prérequis aux compétences pédagogiques) et capacités d'adaptation face à un problème nouveau. Les rares exercices présentant une «astuce» ont fait l'objet d'indications claires et précises dans l'énoncé ou bien directement par l'examinateur le cas échéant.
- Les exercices font parfois intervenir des objets ne tombant pas directement dans le programme (par exemple, des EDO non linéaires). Dans ce cas, le jury est bien conscient de ce fait, et aucune connaissance hors programme n'est attendue des candidats. Le but de telles questions est de voir comment l'aspirant normalien réagit face à la nouveauté ou à un cadre original. Les énoncés sont conçus pour pouvoir être résolus grâce à une réflexion ne faisant intervenir que des notions connues des candidats. De même il est

rappelé qu'un étalage de connaissance hors-programme ne fait gagner aucun point supplémentaire. Les quelques candidats s'y étant risqué ont au contraire mis en avant une difficulté à se concentrer sur une problématique donnée et à identifier de façon précise les connaissances nécessaires à la résolution de l'exercice.

- Le niveau des exercices proposés étant relativement hétérogène, il est compensé par la quantité d'indications fournies par le jury. Les candidats ne doivent donc pas s'inquiéter si l'examinateur à tendance à lui en fournir régulièrement : cela peut simplement signifier que l'exercice proposé est très difficile et nécessite un soutien régulier du jury pour être résolu dans les 45 minutes imparties.

Pour illustrer quelques-uns de ces points, voici des exemples d'exercices proposés lors des épreuves orales. Pour certains exercices, seules les premières questions étaient données aux candidats au début de l'oral.

Exercice :

1. Soit $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et bornée. On définit la fonction Λ_f par

$$\Lambda_f(u) = \int_0^\infty e^{-ux} f(x)\,dx\,.$$

1) Pour tout $u > 0$, on pose $\Lambda(u) = \int_0^\infty e^{-ux} f(x)\,dx$.

1. Montrer que la fonction Λ est bien définie, continue, décroissante et convexe sur $]0,+\infty[$.
2. Que vaut $\lim_{u\to+\infty} \Lambda(u)$? que vaut $\lim_{u\to 0} \Lambda(u)$?

2) Montrer que si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont deux fonctions continues $]0,1[\to \mathbb{R}$ et bornées, telles que pour tout $k \geq 1$ on a

$$\int_0^1 x^k \tilde{f}(x)\,dx = \int_0^1 x^k \tilde{g}(x)\,dx\,,$$

alors $\tilde{f} = \tilde{g}$. En déduire que si f, g sont deux fonctions continues positives bornées telles que $\Lambda_f = \Lambda_g$, alors $f = g$.

Commentaires. La première partie de cet exercice a généralement été bien réussie, même si certains candidats y ont passé trop de temps, par manque de réflexes. Nous avons notamment pu apprécier le fait que le théorème de dérivation sous le signe intégral, lorsqu'il était utilisé, était parfaitement connu et maîtrisé par les candidats.

La deuxième partie a été traitée de manière assez hétéroclite : certains candidats n'ont pas eu l'idée d'utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass, certains n'ont pas vu le problème lié au fait que l'intervalle $]0,1[$ était ouvert, et certains, même avec plusieurs indications (et bien que ce type d'argument soit relativement classique), n'ont pas réussi à mettre en place les arguments de manière propre.

Exercice :

1) 2. Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux, montrer que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

2) Dans le cas où $d = \text{pgcd}(m,n)$, montrer que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}$.

3) Montrer que $a \mid b$ implique $\varphi(a) \mid \varphi(b)$. **4)** Etablir la formule $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. **5)** Etablir la formule $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$, où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ si p est premier, $\mu(p^k) = 0$ si p est premier et $k \geq 2$ et $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ dès que m et n sont deux entiers premiers entre eux.

Commentaires.
Dans cet exercice, il était prévu de tester les candidats et candidates sur leur connaissances de la formule de l'indicatrice d'Euler en commençant par une preuve du théorème des restes chinois. On s'attendait ensuite à utiliser le fait que φ est une fonction multiplicative pour résoudre la plupart des questions en se ramenant au cas de puissances de nombres premiers grâce au théorème fondamental de l'arithmétique.

Cet exercice a été très discriminant, donnant lieux à d'excellentes planches, certain.e.s candidat.e.s maitrisant parfaitement ces notions, tandis que d'autres ne savaient plus prouver le théorème des restes chinois (pourtant au programme) ou ne connaissaient la valeur de l'indicatrice d'Euler que pour les nombres premiers mais pas pour les puissances de nombres premiers.

Exercice : Projection de $S_n(\mathbb{R})$

On se place dans l'espace $S_n(\mathbb{R})$ que l'on muni de sa structure euclidienne donnée par le produit scalaire $(A, B) = Tr(AB)$. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $S_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices A symétriques positives, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax, x\rangle \geq 0$$

1) Rappeler la dimension de $S_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un convexe fermé. Donner son intérieur.

3) Etant donné $A \in S_n(\mathbb{R})$ on cherche $P \in S_n^+(\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\forall M \in S_n^+(\mathbb{R}), \quad ||A - P|| \leq ||A - M|| \tag{1}$$

a) Montrer que la condition (1) est équivalente à la condition :

$$\forall M \in S_n^+(\mathbb{R}), \quad \langle A - P, M - P\rangle \leq 0 \tag{2}$$

b) Montrer que si P existe alors il est unique.
c) Trouver l'expression de la matrice P en fonction de A.

Commentaires.
Cet exercice repose sur des manipulations d'algèbre linéaire assez élémentaires. Globalement les candidats montrent une bonne connaissance du cours et de bons réflexes dans la manipulation d'inégalité dans les espaces euclidiens.

La question 2 a été, de façon surprenante, la plus discriminante. De nombreux candidats ont éprouvé beaucoup de difficultés à trouver l'intérieur de $S_n^+(\mathbb{R})$. Certains ont l'intuition du résultat mais ne parviennent pas à le démontrer, principalement à cause d'un manque de réflexe sur la manipulation de la notion d'intérieur.

Les questions suivantes ont été mieux réussies. La dernière question a permis de tester les capacités d'analyse des candidats et leur capacité à adopter une démarche de recherche de solutions en se ramenant à des cas simples. Cela n'a pas toujours été bien réussi, les candidats ayant trop souvent tendance à vouloir trouver une solution dans le cas le plus global et étant assez frileux dans les étapes d'analyses. Rares sont les candidats qui ont ainsi pensé à rechercher la matrice P dans une bonne base de diagonalisation.

Exercice :

Soient $a \geq b > 0$.

(a) Montrer que

$$1 \leq \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}} \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

On pose maintenant

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}.$$

(b) Calculer $I(a,a)$ pour tout $a > 0$.

(c) Montrer que

$$I(a,b) = I((a+b)/2, \sqrt{ab}).$$

(d) En déduire une expression de $I(a,b)$ pour $a > b > 0$.

(e) Montrer que

$$I(n,1) \sim \frac{\log n}{n}$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Commentaires.

Cet exercice sur le calcul d'une intégrale elliptique de première espèce dû à Gauss visait à évaluer la dextérité des candidat.es sur des changements de variable. La première question autour de l'inégalité arithmético-géométrique et d'identités remarquables était facile et a été bien traitée dans l'ensemble. Le cas $a = b$ avec la primitive arctangente, également.

C'est la troisième question qui était discriminante. Il s'agissait de trouver le bon changement de variable permettant d'arriver à l'identité remarquable de Gauss. Ce changement de variable utilisant la parité est élémentaire mais ne s'obtient pas forcément du premier coup et les candidat.es étaient jugé.es sur leur capacité à rebondir sur un calcul pouvant aller dans la mauvaise direction, en interaction avec le jury. Certain.es y sont très bien arrivé.es, d'autres pas.

Une fois l'étape (c) franchie, la question (d) était essentiellement une question de cours sur les suites adjacentes en utilisant (a), et a été très bien traitée par les candidat.es arrivé.es jusque là. En revanche la dernière question, asymptotique et faisant appel à un bon découpage, n'a pas été abordée.