Banque PC inter-ENS – Session 2022
Rapport du jury relatif à l'épreuve d'oral de mathématiques (Math UL)

Écoles partageant cette épreuve : ENS ULM, ENS DE LYON

Coefficients (en pourcentage du total d'admission de chaque concours) :

- ENS ULM
  - Option Physique : 17,1 %
  - Option Chimie : 17,1 %
- ENS DE LYON : 7,0 %

Membres du Jury : Alexandre BORITCHEV, Emmanuel GRENIER, Sandra ROZENSZTAJN, Khaled SALEH.

Commentaires :

- Le niveau global est solide. Très peu de notes en-dessous de 10 et quelques excellents étudiants avec 17 ou plus.
- De bonnes surprises au niveau des probabilités discrètes (pourtant souvent abordées très rapidement dans le programme), même dans des contextes peu standards (matrices...)
- En algèbre linéaire, le cours et les méthodes standards étaient connus, sans remarques particulières.
- En revanche, quelques mauvaises surprises en analyse :
  - Des contre-exemples classiques non connus. En particulier, trop de candidats n'ont pas su donner un exemple de fonction d'intégrale finie sur $\mathbb{R}^+$ mais ne tendant pas vers 0 en $+\infty$ (ou de façon équivalente d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, de limite finie en $+\infty$, mais dont la dérivée ne tend pas vers 0 en $+\infty$).
  - De façon surprenante, aucun candidat confronté à une telle question n'a pu démontrer que pour $f : x \mapsto \mathbb{R}$ continue (définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ ou $x \in \mathbb{C}$), si $|f(x)| \to +\infty$ lorsque $|x| \to +\infty$, alors $\inf_x |f(x)|$ est atteint. Sans avoir à recourir à des outils hors programme (compacité) une telle question doit pouvoir être traitée en ramenant le problème de minimisation à un fermé borné.
  - Il est dommage que le passage d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction de la variable réelle associée n'est pas toujours naturel, car certains exercices sur les polynômes se résolvent en invoquant des résultats d'analyse (théorème de Rolle, *etc*...).
  - La différence entre le caractère local d'un développement de Taylor-Young et global de l'inégalité de Taylor-Lagrange n'est parfois pas maîtrisée.

Exemples d'exercices :

Exercice 1 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.*

1. *On suppose $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, est-ce que f a une limite finie?*
2. *On suppose qu'il existe un réel a tel que $f(x) \to a$ quand $x \to +\infty$. Est-ce que $f'(x) \to 0$? et si je suppose f décroissante?*
3. *On suppose qu'il existe des réels a et b tels que $f(x) \to a$ et $f'(x) \to b$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $b = 0$.*
4. *On suppose que $f(x) + f'(x) \to a$ quand $x \to +\infty$. Montrer que f et f' ont des limites en $+\infty$, lesquelles?*
5. *Soit $n > 0$. On suppose que f est $\mathcal{C}^n$, et que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) \to a$ quand $x \to +\infty$, montrer que $f, f', \cdots f^{(n)}$ ont des limites en $+\infty$, lesquelles?*
6. *Généraliser.*

Exercice 2 *On lance une fusée sachant que les chances d'échouer sont de 2 pourcents.*

1. *Trouver l'expression du nombre de lancers nécessaires pour que la probabilité d'avoir au moins un échec dépasse $1/2$.*
2. *Existe-t-il un entier n tel que la probabilité d'avoir au moins 10 échecs parmi n lancers soit supérieure à 0.9? Justifiez-le.*

Exercice 3 *Soit A, B deux éléments de $M_n(\mathbb{C})$. On définit une application linéaire $\delta : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ par $X \mapsto AX + XB$.*

1. *Montrer que si A et B sont diagonalisables alors δ aussi et donner ses valeurs propres.*
2. *Montrer que si A et B sont nilpotentes alors δ aussi. Que dire de son indice de nilpotence?*