Banque MP inter ENS - Session 2022, Rapport relatif à l'épreuve orale de Maths Ulm

Membres du jury : Laure Dumaz et Romain Tessera

Coefficients (en pourcentage du total des points de chaque concours) :
ENS Ulm :

— Concours MP Option MP : 27,8 %.
— Concours MP Option MPI : 27,8 %.

Nous félicitons les candidats et leurs professeurs pour leur préparation. Le niveau était globalement très élevé et nous avons apprécié les discussions mathématiques que nous avons eues avec les candidats.

1 Sur les thèmes choisis

Nous avons essayé de couvrir une grande partie du programme MPSI-MP avec les sujets proposés.

— Nous avons privilégié les problèmes à l'intersection de plusieurs thèmes : par exemple algèbre/proba, proba/analyse, algèbre/topologie, etc.
— La réduction des endomorphismes est le sujet favori des candidats qui maîtrisent manifestement bien cette partie du cours même s'il y a parfois eu quelques fautes grossières ou des confusions lorsque l'exercice mêlait d'autres parties du programme.
— Contrairement à l'année précédente, nous sommes plutôt satisfaits des performances des étudiants sur les exercices de probabilités.

2 Sur les exercices posés

Dans nos exercices, nous avons voulu favoriser une démarche "recherche". Ainsi, tous les énoncés qui s'y prêtaient ont été posés de façon ouverte. Parfois, il fallait trouver la bonne formulation de l'énoncé. Cela n'a pas semblé déstabiliser la plupart des candidats qui ont pu montrer leur inventivité et leur bonne compréhension des objets en question. Les exercices donnés étaient souvent difficiles à résoudre sans indication : les candidats doivent en être conscients et rester combatifs lorsqu'ils bloquent sur sa résolution.

3 Attitude attendue des candidats

— **Ce n'est pas une épreuve de vitesse !** Un bon nombre de candidats veulent aller trop vite, sans prendre le temps de bien formuler leur pensée et écrivent des choses imprécises ou fausses.
— **Clarté et transparence.** Nous encourageons les candidats à être le plus clair possible dans leur discussion avec l'examinateur. Ne pas hésiter à dire qu'ils se sont trompés lorsque c'est le cas par exemple. Le candidat doit expliquer où il en est, et ce qu'il essaye de faire. A

contrario, il est de mauvais effet de parler sans discontinuer et sans prendre le temps de réfléchir.

— **Le candidat est seul maître à bord !** Ce n'est pas à l'examinateur de corriger les erreurs du candidat. Certains candidats tentent plusieurs pistes, et attendent que l'examinateur valide l'une d'entre elles. Insistons bien sur le fait que ce n'est pas son rôle : nous attendons d'un candidat qui pense avoir résolu une question qu'il prenne la peine de vérifier par lui-même que son raisonnement est juste.

— **Autonomie.** Nous avons privilégié la liberté des candidats en les laissant explorer leurs propres intuitions et voir où elles les menaient. Cette démarche implique que nous restions discrets, voire silencieux pendant la première partie de l'oral. Ce silence ne doit pas déstabiliser les candidats. Certains candidats, perdus pendant la première partie de l'oral ou qui n'avançaient pas beaucoup, ont finalement réussi à trouver une idée pour démarrer. Un oral où l'examinateur intervient peu est en général signe que le candidat fait preuve d'autonomie.

4 Evaluation

La note n'est pas nécessairement une fonction croissante de l'avancée sur l'exercice. Un candidat qui a eu de bonnes idées et les a développées de façon claire et correcte mais qui n'a pas réussi à aller au bout de l'exercice peut avoir une très bonne note. Inversement certains candidats ont pu se voir attribuer une note moyenne alors qu'ils étaient allés au bout de l'exercice, mais avec beaucoup d'aide. Pour cette raison, nous encourageons les candidats à rechercher la précision et l'autonomie, et nous les exhortons à rester positifs et persévérants jusqu'à la fin de l'oral.

Les erreurs mathématiques non corrigées spontanément par le candidat ont été lourdement sanctionnées. Certains candidats partent dans la bonne direction mais sont trop imprécis et commettent de nombreuses erreurs : c'est dommage !

En résumé les 4 critères principaux qui nous ont guidés sont : l'inventivité, l'autonomie, la clarté et la précision. Ce n'est que dans un second temps que nous avons pris en compte la vitesse du candidat.

5 Quelques exercices posés

Voici certains des exercices posés lors de cette session 2022.

Exercice 1 (Point presque-fixe)**.** Soit G un sous-groupe fini de cardinal n de $O(d)$ (matrices orthogonales de tailles d). Montrer que s'il existe un vecteur unitaire v tel que

$$\|g(v) - v\|^2 < \frac{2n}{n-1}$$

pour tout $g \in G$, alors il existe un vecteur non nul w tel que $g(w) = w$ pour tout $g \in G$. Sans supposer G fini, montrer que le résultat reste vrai en supposant $\sup_{g \in G} \|g(v) - v\|^2 < 2$. Est-ce optimal ?

Exercice 2 (Matrices qui commutent presque)**.** Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $d \geq 1$ et tout $n \geq 1$, et tout couple (A, B) de matrices orthogonales de taille n telles que $A^d = I_n$ et $\|A^k B - BA^k\| \leq \delta$ pour tout entier k, alors il existe une matrice orthogonale B_1 telle que $\|B_1 - B\| \leq \varepsilon$, et telle que A et B_1 commutent. Montrer que le résultat reste vrai sans l'hypothèse A d'ordre fini.

Exercice 3 (Ensemble de Cantor.)**.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 1/x$. Montrer que $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}([-1,1])$ est un compact sans points isolés et d'intérieur vide tel que $f(K) = K$, et qui contient un ensemble dense de points périodiques de f.

Exercice 4 (Limite uniforme de polynômes à coefficients positifs)**.**

1. Trouver l'ensemble des fonctions continues $g : [-1,0] \to \mathbb{R}$ qui sont des limites uniformes de polynômes à coefficients positifs.
2. Même question avec l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 5 (Choquet-Deny)**.** Quelles sont les solutions f bornées et continues de l'équation suivante :

$$\frac{1}{4}(f(x-1) + f(x+1) + f(x-\pi) + f(x+\pi)) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Exercice 6 (Fonctions produits invariantes)**.** Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de dimension n. Trouver l'ensemble des fonctions $f : S_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $A \in S_n(\mathbb{R})$, pour tout $O \in O_n(\mathbb{R})$, $f({}^tOAO) = f(A)$ et f se décompose de la façon suivante : pour tout $A \in S_n(\mathbb{R})$, $f(A) = \prod_{i\leq j} f_{i,j}(A_{ij})$ avec $f_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dérivables.

Exercice 7 (Une suite non-bornée)**.** On définit une suite comme suit : $u_0 = 1$, et pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 2u_{n-1}$ si n est une puissance de 2, et $u_n = \lceil u_{n-1}/3 \rceil$ si n est une puissance de 3, et $u_n = u_{n-1}$ sinon. Montrer que cette suite n'est pas bornée.

Exercice 8 (Entiers relatifs et sommes)**.** Soit $M, m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 3$ et $(k_i)_{0\leq i\leq M}$ une suite d'entiers relatifs tels que $\sum_{i=0}^{M} k_i r^i = \sum_{i=0}^{m} r^i$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{M} |k_i| \geq m + 1.$$

Le résultat reste-t-il vrai pour $r = 2$?

Exercice 9 (Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$)**.** Déterminer le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$, où n est un entier positif. À quelle condition est-il fini ? Est-il toujours engendré par une partie finie ?

Exercice 10 (Application convexe)**.** On note $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. Montrer que l'application qui à $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ associe $\mathrm{Tr}(\exp(A))$ est convexe.

Exercice 11 (Continuité de l'intégrale)**.** Caractériser les suites $u_n > 0$ croissantes telles que

$$\lim_n u_n \int |f(x+1/n) - f(x)| dx = 0$$

pour toute fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (Irrégularité de l'exposant de Lyapunov)**.** Soient $M_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $a > 1$. Soit X_j une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ et $A_j := X_j M_1 + (1 - X_j) M_2$. On considère $\gamma_n(p) := \frac{1}{n} \ln \|A_n \cdots A_1\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme sur les matrices 2×2. Étudier l'asymptotique de $\gamma_n(p)$.