

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
Second concours : Filière universitaire
Session 2023

Rapport sur l'épreuve écrite de Mathématiques

* * *

Le sujet comporte deux exercices (un exercice d'analyse et un exercice de probabilités) et un problème d'algèbre. Les premières questions de chaque exercice se voulaient classiques et très proches du cours. Le premier exercice consiste en l'obtention de majorations des dérivées successives des fonctions sinus cardinal et $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$. Pour sinus cardinal, la méthode est complètement élémentaire mais elle est nettement plus astucieuse pour $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$. Cependant, le sujet donnait suffisamment d'indications pour que seule la dernière question soit réellement difficile. Au final, cet exercice couvrait une partie significative de l'analyse réelle.

Le deuxième exercice consiste en la démonstration du théorème de Pólya pour les marches aléatoires symétriques sur le réseau \mathbb{Z}^d . Les techniques probabilistes usuelles étaient largement utilisées dans cet exercice qui ne comportait aucune question infaisable.

Enfin, le problème d'algèbre tournait autour de la question suivante : l'égalité $e^{AB} = e^{BA}$ implique-t-elle la relation $AB = BA$ pour des matrices carrées à coefficients complexes ? Il demandait une bonne maîtrise de l'exponentielle matricielle ainsi que des théorèmes de réduction.

Chaque exercice a été abordé de façon significative dans plusieurs copies, l'exercice d'analyse s'est avéré celui où les candidats n'ont en général effleuré que les questions triviales et sont rapidement passés aux suivants. Comme l'année dernière, il semblerait que les probabilités posent de grandes difficultés à une majorité de candidats.

Le sujet est volontairement trop long afin que chacun puisse s'exprimer en fonction de son cursus. Il n'est bien entendu pas envisageable de le terminer dans le temps imparti et il est possible d'avoir une très bonne note en n'en traitant qu'une partie. La meilleure copie, particulièrement excellente, contenait la résolution correcte d'environ 2/3 de chacun des 3 exercices. Il est toujours plus efficace de traiter parfaitement correctement un petit nombre de questions plutôt que de maltraiter la totalité du sujet...

D'un point de vue statistique, 22 candidats ont rendu une copie en mathématiques, soit 10 de moins que l'an dernier. Les notes s'étalent de 1 à 20 pour une moyenne de 8/20, 8 candidats ont obtenu la moyenne et seulement 4 candidats ont une note inférieure à 5. Cette épreuve a permis de sélectionner les candidats faisant preuve d'une bonne culture mathématique et aptes à poursuivre le concours.

Comme chaque année, la précision des arguments et la qualité de la rédaction ont été valorisées. Les arguments approximatifs, ou d'autorité, ne sont pas acceptables pour ce type de concours. La présentation des copies est analogue à celle de l'an dernier, c'est-à-dire tout à fait convenable. On rappelle que l'on attend aussi du candidat à un tel concours qu'il présente un travail soigné, où les principaux résultats sont encadrés et les arguments essentiels mis en valeur par un soulignement par exemple.

Comme chaque année, nous encourageons les candidats motivés à préparer sérieusement ce concours et à ne pas se censurer. Si les sujets sont volontairement longs et difficiles, ils contiennent suffisamment de questions proches du cours pour que tout candidat sérieux avec une bonne culture mathématique puisse se voir donner la possibilité de défendre ses chances à l'oral.