Rapport de l'épreuve d'Oral de Mathématiques

- Banque BCPST INTER-ENS — Session 2023
- Écoles concernées : Mines de Paris / ENPC
- Coefficient en pourcentage du total d'admission : 17,5%
- Jury : Anne–Sophie GUINOTTE & Jonathan HARTER

1. PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE

L'épreuve d'Oral de Mathématiques commun aux Mines de Paris et à l'École des Ponts (concours BCPST) dure 50 minutes et est précédée de 15 minutes de préparation. Elle se déroule dans les locaux de l'ENPC.

Elle consiste en deux exercices permettant de balayer une vaste partie du programme de Mathématiques des deux années de classe préparatoire. Elle ne comporte pas d'Informatique. Quelle qu'ait été la préparation du candidat, les deux exercices seront abordés pendant l'oral, permettant ainsi au jury d'évaluer aussi le candidat sur sa réactivité face à des questions nouvelles auxquelles il n'aura pas eu le temps de réfléchir pendant les 15 minutes de préparation.

On attend du candidat qu'il sache traiter d'emblée des questions classiques et faisant appel aux méthodes du cours. En revanche il est légitime sur des questions plus difficiles qu'il soit amené à réfléchir et à proposer des pistes qui n'aboutiront pas, du moment qu'elles sont cohérentes et justifiées par rapport à l'exercice, et démontrent à la fois une bonne connaissance du cours et un esprit d'initiative. Le jury rappelle que son rôle est d'évaluer afin de classer, ce qui l'amène à interroger les candidats. Cet oral n'est pas un « écrit au tableau » mais bien un dialogue pertinent sur les Mathématiques.

2. REMARQUES DU JURY

Commençons par une remarque préliminaire : de façon générale, toute notion utilisée n'étant pas au programme de BCPST peut faire l'objet d'une question de cours et d'une demande d'éclaircissement. Citons quelques exemples classiques :

- le critère de RIEMANN pour les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \notin \{1,2\}$) ou les intégrales $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$: il est attendu que les candidats sachent expliquer la convergence ou divergence de l'objet pour la puissance considérée.
- Le critère sur les petits o pour la nature de séries et d'intégrales : il est ici attendu que les candidats sachent transformer la relation en inégalité locale.

2.1. Algèbre

Le cours sur la diagonalisation est globalement su et maîtrisé, nous notons toutefois des confusions entre différentes définitions (caractère inversible et diagonalisable d'une matrice par exemple). En revanche, les candidats ont toujours des difficultés à manier les complexes.

2.2. Analyse

Les candidats sont peu à l'aise avec l'utilisation des valeurs absolues. Les exercices sur les suites d'intégrales, très classiques, sont rarement bien réussis. Pour analyser la nature d'un tel objet, l'encadrer ou majorer sa valeur absolue quand 0 est la limite pressentie, devrait être un réflexe.

Encore cette année, nous notons des maladresses dans l'application du critère de comparaison pour les séries et les intégrales impropres : les candidats ont tendance à écrire directement des inégalités de sommes partielles (parfois même de sommes de séries) ou d'intégrales généralisées avant même de justifier leur existence. Faire cela revient à vouloir redémontrer le théorème à chaque utilisation en appliquant le théorème de convergence monotone.

Le calcul intégral, notamment l'intégration par parties et le changement de variable, y compris pour les intégrales généralisées, est plutôt bien maitrisé chez les candidats interrogés mais une justification spontanée est attendue (au moins oralement) : elle est encore bien souvent oubliée.

2.3. Probabilités

Il faut connaître les définitions des objets manipulés : variable aléatoire, événement. Ne pas confondre événement et probabilité de cet événement. Il faut aussi se préoccuper de la nature des variables aléatoires manipulées (discrète ou à densité), les exercices mêlant les deux types de variables aléatoires sont rarement réussis. Les lois usuelles du programme, et leurs caractéristiques, sont en revanche bien maitrisées.

Être méthodique dans la mise en place des exercices de probabilités (par exemple, penser à donner le support d'une variable aléatoire même s'il n'est pas explicitement demandé ou encore écrire clairement le système complet d'évènements associé à une formule des probabilités totales), est nécessaire pour pouvoir rédiger un exercice probabiliste de manière satisfaisante. Enfin, la notion de convergence en loi introduite dans les nouveaux programmes semblait plutôt maitrisée par les candidats interrogés sur le sujet.

2.4. Forme & Présentation

Nous conseillons aux candidats d'éviter de cacher systématiquement le tableau au jury pendant ses calculs, en lui tournant le dos. Il est aussi attendu que les candidats sachent gérer leur tableau de manière autonome. De plus, le candidat ne doit pas hésiter à donner un nom à une intégrale ou à une fonction s'il va avoir besoin de l'utiliser plusieurs fois dans son exercice, de-même que dans une longue expression avec plusieurs termes (un calcul de limite par exemple), il ne doit pas hésiter à chercher le résultat de chaque terme séparément avant de les regrouper.

2.5. Conclusion

De manière générale, les étudiants sont bien préparés, ont une attitude volontaire pour avancer et tiennent compte des indications données. Les questions de calculs sont cependant assez discriminantes. Il est regrettable qu'un oral globalement réussi soit entaché d'erreurs élémentaires sur les fonctions usuelles (propriétés du logarithme ou formules de trigonométrie par exemple). Nous invitons les candidats à soigner ce point.

3. EXEMPLES DE SUJETS

3.1. Exemple 1

Exercice 1 | Soient $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ et $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ deux applications linéaires. On note $h = f \circ g$, et on suppose que la matrice de h est donnée dans la base canonique par :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $h \circ h = h$, et que : $\mathrm{Rg}(h) = 2$.
2. Montrer que $\mathrm{Rg}(h) \leqslant \mathrm{Rg}(f)$ et $\mathrm{Rg}(h) \leqslant \mathrm{Rg}(g)$.
   En déduire les valeurs de $\mathrm{Rg}(f)$ et de $\mathrm{Rg}(g)$.
3. On souhaite démontrer que $g \circ f = \mathrm{Id}$. On considère $\widehat{f} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathrm{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right.$
   - **3.1)** Justifier que $\widehat{f}$ est bijective.
   - **3.2)** En exploitant $h \circ h = h$ et la question précédente, montrer que : $g \circ f \circ g = g$.
   - **3.3)** Conclure.

Exercice 2 | [Solution] Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Trouver la limite de I_n lorsque $n \longrightarrow \infty$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $|\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n| \leqslant \dfrac{1}{2n(2n+1)}$.
3. Calculer J_n pour $n \geqslant 1$. *Indication : On pourra effectuer le changement de variable $t = 1 + x^n$*
4. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque $n \longrightarrow \infty$.

3.2. Exemple 2

Exercice 3 | Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. On définit la trace de A par : $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. **1.1)** Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.
   1.2) Déterminer Im(Tr). Pour $n = 3$ donner une base de Ker(Tr).
2. **2.1)** Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{BA})$.
   2.2) Existe-t-il deux matrice A et B dans $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ telles que $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$?
3. **3.1)** Calculer $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A} \times \mathrm{A}^\top\right)$.
   3.2) Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{A}^\top = 0 \iff \mathrm{A} \times \mathrm{A}^\top = 0$.
4. **4.1)** Montrer que si A est diagonalisable, alors Tr(A) vaut la somme des valeurs propres.
   4.2) *Application* — Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A si c'est possible.

Exercice 4 |

1. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.
   1.1) Montrer que ces intégrales convergent et que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
   1.2) En effectuant le changement de variable $x = t - \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale $\mathrm{I} + \mathrm{J}$, calculer la valeur commune de I et J.
2. Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{a}{1+x^4}$. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   3.1) Montrer que X admet une espérance et déterminer sa valeur.
   3.2) Montrer que X admet une variance et déterminer sa valeur.