Banque MP inter-ENS session 2023
Rapport relatif à l'épreuve orale de mathématiques
Lyon

1 Ecoles partageant cette épreuve

ENS de Lyon

2 Coefficients

* Concours MP Option MP : 16,2 %
* Concours Info Option P : 16,2 %

3 Membres du jury

Razvan Barbulescu, Adrien Boyer, Rémy Rodiac.

4 Déroulement du concours

L'épreuve orale MP/MPI/I de l'ENS de Lyon compte près de 230 à 250 candidats et candidates. Le jury était formé de trois enseignants-chercheurs. Afin d'assurer l'équité du concours, les 3 membres du jury examinent dans 3 salles parallèles et posent le même exercice sur deux créneaux consécutifs. Après chaque exercice, le jury se réunit et discute les points forts de chaque candidate et candidat dans le but d'harmoniser la notation.

Un oral dure 45 minutes sans préparation et se compose d'un exercice (parfois deux). Les exercices sont d'une difficulté élevée et le jury n'attend pas que les élèves sachent les résoudre de manière autonome. Les exercices ont généralement des énoncés courts et sont toujours dictés. Si un exercice demande de démontrer plusieurs points, seul le premier est donné au commencement. Au début de l'oral, le jury se tait pour laisser le temps à l'élève d'élaborer sa propre stratégie de résolution si s'est possible, sinon de faire des dessins, de proposer des exemples, de résoudre des cas particuliers ou de proposer de renforcer les hypothèses de l'énoncé quand cela est pertinent. Quand la candidate ou le candidat le souhaite un dialogue commence avec le jury. Le candidat ne doit pas hésiter à demander s'il n'est pas sûr de l'énoncé ou si quelque chose lui paraît ambigu. Tant que possible, la candidate ou le candidat avance seule, sinon le jury donne une indication pour débloquer. L'indication n'est pas toujours précise, par exemple le jury peut dire qu'il existe un résultat du cours qui semble s'appliquer ou au contraire que pour un point précis d'analyse il faut revenir au langage de ϵ et δ. C'est une situation similaire avec une indication que peut recevoir une ou un stagiaire lors d'un stage de recherche dans un institut de mathématiques. Les énoncés des exercices sont des prétextes à une discussion mathématique.

5 Exemple d'exercices

Voici cinq exemples d'exercices donnés lors de la session 2023.

Exercice 1 *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé, on note* $d(x,y) = \|x-y\|$. *Si* $D \subset E$ *on note* $d(x,D) := \inf\{d(x,y); y \in D\}$ *et* $d(x) = d(x, E \setminus \{x\})$. *L'ensemble des points d'accumulation de* E *est noté* $A = \{x \in E; d(x) = 0\}$.

1) *On suppose que toute fonction continue* $f : E \to \mathbb{R}$ *est uniformément continue. Montrer que toute suite* $(x_n)_n \subset E$ *qui vérifie* $\lim_{n\to+\infty} d(x_n) = 0$ *admet une sous-suite convergente.*
2) *Montrer que cette dernière propriété implique que* A *est compact et que pour tout* $\delta_1 > 0$ *il existe* $\delta_2 > 0$ *tel que pour tout* $x \in E$ *tel que* $d(x,A) > \delta_1$ *on ait* $d(x) > \delta_2$.

Exercice 2 *Soit* $\Xi(t) = \int_0^\pi \frac{1}{(e^{2t}\cos^2(\theta)+e^{-2t}\sin^2(\theta))^{1/2}} d\theta$, *montrer qu'il existe* $a, b > 0$ *tels que* $\Xi(t) \leq (at+b)e^{-t}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *Soit* $\mathcal{E}$ *un ensemble de parties de* $[|1,n|]$.

1. *Pour toute partie* $A \in \mathcal{E}$ *on considère le vecteur* $(\chi_A(i))_{i=1,2,\dots,n} \in \mathbb{F}_2^n$, *où* $\mathbb{F}_2$ *est le corps à 2 éléments. On suppose que, pour toute paire de parties* $(A,B) \in \mathcal{E}^2$, $A \Delta B \in \mathcal{E}$ *où* $A\Delta B = A \bigcup B - A \bigcap B$ *(la différence symétrique). Quelle structure algébrique a l'ensemble* $C := \{\chi_A \mid A \in \mathcal{E}\}$ *?*
2. *Soit* $\mathcal{E}$ *un ensemble de parties de* $[|1,n|]$ *qui n'a pas forcément la propriété du point 1 (qui n'est pas forcément stable par différence symétrique). On suppose que* $\mathcal{E}$ *a la propriété suivante :*

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \quad |A \textstyle\bigcap B| \text{ est pair.}$$

Montrer que $\mathcal{E}$ *a au plus* $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ *éléments.*

Exercice 4 *Soit* $p > 1$. *Montrez qu'il existe une constante* K_p *telle que pour toute paire* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *telle que* $|x|^p + |y|^p = 2$ *, on a*

$$(x-y)^2 \leq K_p \left(4 - (x+y)^2\right).$$

Exercice 5 *Quelles sont les classes de conjugaison de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *? La même question pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

6 Remarques spécifiques

Les exercices qui font appel à des notions du programme MP, comme les intégrales impropres, le théorème de convergence dominée, les marches aléatoires et les matrices symétriques ont été les plus appréciés. Au contraire, les questions moins bien traitées étaient liées aux suites convergentes, aux systèmes linéaires, à la convexité et à l'intégration à une variable (changement de variable). Prenons quatre exemples en lien avec les exemples d'exercices donnés ci-dessus :

- K est un corps et C un K-sous-espace vectoriel de K^n. Les éléments de K^n sont notés comme des colonnes. On suppose :

$$\forall (x,y) \in K^n \times K^n, \quad x^t \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0.$$

  Montrez que $\dim C \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Le jury suggérait de considérer une base $c_1, \ldots, c_k$ de C et de noter G la matrice dont les lignes sont $c_1^t, \ldots, c_n^t$. Notons que $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(G^t) = k$. L'ensemble de solutions du système linéaire

$$G^t \cdot x = 0$$

  est un espace vectoriel $\ker G$ de dimension $n - k$ (théorème du rang). L'hypothèse de l'exercice implique $C \subset \ker G$ donc $k = \dim C \leq \dim \ker G = n - k$.
- Soit $p > 1$. Trouvez les réels positifs x et y tels que $x^p + y^p = 2$ et $x + y = 2$. On pense facilement à poser la fonction $x \mapsto x^p$ qui est convexe et on obtient que

$$\frac{x^p + y^p}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^p.$$

  Pour conclure on utilise le fait que la fonction $x \mapsto x^p$ n'a pas de morceau affine, donc l'inégalité de convexité est stricte quand $x \neq y$. On conclut que $(x,y) = (1,1)$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans un espace topologique. Montrez qu'un des deux cas est toujours vrai : a) on peut extraire une sous-suite convergente ou b) on peut extraire une sous-suite dont les termes sont mutuellement disjoints. Si la suite prend une valeur une infinité de fois on peut extraire une suite constante donc convergente. On peut donc supposer que, pour tout n, $|\{m \in \mathbb{N} \mid x_m = x_n\}|$ est fini. On définie par récurrence une fonction $\varphi(n)$. On pose $\varphi(1) = 1$. Ensuite on pose $\varphi(n) = \min\{m \in \mathbb{N}, m \geq \varphi(n-1) + 1 \mid x_m \notin \{x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n-1)}\}\}$. On est dans le cas où m doit éviter un nombre fini de valeurs pour $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ..., $\varphi(n-1)$ donc un nombre fini de valeurs en tout. On conclut que $\varphi(n)$ est le minimum d'un ensemble non-vide, donc il existe.
- Le calcul de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{e^{2t}\cos^2(\theta) + e^{-2t}\sin^2(\theta)}$$

  a été particulièrement laborieux alors qu'il ne faisait appel à aucune technique originale.