Banque MP inter-ENS – Session 2023

Rapport relatif à l'épreuve orale de mathématiques SR

- **Ecoles partageant cette épreuve :**
  ENS Paris-Saclay, ENS Rennes
- **Coefficients** (en pourcentage du total des points de chaque concours) **:**
  - ENS Paris-Saclay
    - Concours MP Option MP : 23,1 %
  - ENS Rennes
    - Concours MP Option MP : 23,1 %
- **Membres du jury :**
  A. Bailleul, L. Devin, L. Gassot, D. Lesesvre, R. Riblet

Déroulement de l'épreuve

Cette année, 295 candidats et candidates ont passé l'oral de mathématiques spécifique pour les écoles normales supérieures de Rennes et Paris-Saclay. Il s'agit d'un oral sans préparation, d'une durée de 45 min, constitué d'un exercice qui commence en général par une question simple ou proche du cours — voire une démonstration au programme officiel — et comporte la plupart du temps plusieurs questions intermédiaires ou indications prévues pour êtres fournies au cours de la réflexion du candidat. À quelques rares exceptions près, les exercices n'ont été posés que deux fois durant toute la durée des oraux, sur deux interrogations successives, et à trois ou quatre candidats en parallèle. Il va sans dire qu'il est interdit de prendre des photos de sa prestation à la fin de son oral, ou bien de conserver le support écrit qui a été fourni en début d'oral.

Les premières minutes de l'examen sont dédiées à un travail en autonomie du candidat durant lesquelles l'examinateur n'intervient pas du tout. Cela a pour but de permettre au candidat de s'approprier l'exercice en pleine concentration. Il est conseillé au candidat de ne pas hésiter à utiliser le tableau avec abondance lors de cette première phase, y compris dans une approche de brouillon. Il n'est tenu aucune rigueur au candidat de raisonnements ou résultats faux écrits durant cette phase du moment où ils sont corrigés lors de la restitution orale. Lorsqu'un support écrit est fourni en début d'oral, il n'est pas nécessaire d'en recopier l'énoncé.

La suite de l'oral prend la forme d'un échange avec le jury durant laquelle ce dernier intervient pour aiguiller ou questionner le candidat, que ce soit sur l'exercice ou bien sur une notion connexe. À l'abord d'une nouvelle question, le jury laisse au candidat le temps de creuser une piste et de réfléchir, puis rapidement une discussion s'engage. Selon les situations, cette discussion peut prendre plusieurs formes : l'examinateur peut demander des éclaircissements ou des corrections mineures sur la preuve proposée, une synthèse de l'idée de preuve ou au contraire, réclamer une rédaction plus précise et rigoureuse des arguments précédemment fournis par le candidat.

Sont évalués à la fois la méthode, la rigueur, la connaissance du cours et les compétences techniques, mais aussi l'autonomie, le dynamisme et les capacités de communication. Il va sans dire qu'on ne peut que déconseiller aux futurs candidats et candidates de négliger un de ces points lors de leur préparation. En revanche, le jury n'évalue que très peu la capacité à trouver une solution astucieuse à un exercice : un candidat ou une candidate avançant à son rythme et avec rigueur vers la résolution du problème, en proposant de résoudre des cas particuliers bien choisis ou des résultats intermédiaires, et capable de rebondir sur les indications de l'examinateur, se verra attribuer une excellente note. De plus, un candidat ou une candidate qui reconnaît un exercice déjà fait et veut absolument restituer la méthode apprise, au détriment des indications de l'examinateur, est assez mal perçu, d'autant plus si cette méthode n'est pas maîtrisée.

Évaluation générale des candidats

Le jury s'accorde à dire que l'ensemble des admissibles est de bon niveau, avec une connaissance approfondie du cours, de nombreux réflexes mathématiques et des qualités en calcul. On observe parfois des personnes plus sensibles au stress, qui buttent sur les premières questions ; certaines se révèlent tout à fait capables par la suite, alors que d'autres semblent perdre courage au fur et à mesure de l'oral. Nous rappelons donc à l'ensemble des admissibles que les questions du jury sont là pour aider à avancer dans l'exercice, que chaque année de nombreux candidats font de très bons oraux après un départ laborieux, et qu'il ne faut pas chercher à interpréter la discussion avec le jury, les exercices étant très différents les uns des autres. Le but du jury n'est en aucun cas de piéger les candidats, par ailleurs déjà assez sujets au stress : si l'un d'eux se voit demander s'il est sûr de ce qu'il vient d'affirmer, c'est sans doute que l'interrogateur ou l'interrogatrice veut donner l'occasion de discuter pour clarifier l'énoncé, comprendre l'argument, mettre le doigt sur des imprécisions ou des contre-exemples. Le manque de justifications est aussi toujours relevé par un « pourquoi ? », auquel la réponse attendue n'est souvent que de bien citer un théorème au programme et de vérifier toutes ses hypothèses, ou de clarifier l'argument.

Comme les années précédentes, nous avons noté que de nombreux candidats ne pensent pas à appuyer leur réflexion sur des dessins (ou des exemples simples) qui se révèlent parfois un soutien indispensable à la résolution d'un exercice et qui est, dans tous les cas, d'une grande aide pour clarifier son propos. Le jury a noté de très bon réflexes sur les théorèmes d'échanges de limites et d'intégrales ainsi qu'en probabilités, même si le lien entre indépendance de variables aléatoires et espérance n'est systématiquement maîtrisé. Il y a une plus grande disparité dans la compréhension des structures algébriques abstraites. Le jury a aussi été assez surpris par les difficultés de certains candidats sur des questions de dénombrement, ainsi que par certaines opérations hasardeuses faisant intervenir des nombres négatifs ou complexes (inégalités sans valeur absolue, racine carrée, etc.)

Conseils pour les futurs admissibles

Ces conseils recoupent en grande partie ceux des années précédentes.

- On voit trop de candidats refuser de rédiger leurs preuves et se contenter d'en répéter l'idée générale, malgré l'insistance du jury. Si l'exposé de la stratégie de preuve est apprécié par le jury, sa mise en œuvre se révèle souvent plus délicate qu'il n'y paraît. Il faut donc rédiger proprement une preuve, vérifier les hypothèses des théorèmes, éventuellement énoncer des résultats intermédiaires, etc. Faire manifestement preuve de réticence à écrire son raisonnement au tableau a été systématiquement sanctionné.
- De même, malgré l'insistance du jury, certains candidats rechignent à écrire proprement les hypothèses qu'ils utilisent au tableau, et plus généralement tout ce qui ne relève pas de la formule mais fait quand même partie intégrante du langage mathématique : connecteurs logiques, quantificateurs, etc. Inutile de dire que c'est une très mauvaise idée. En premier lieu, cela permet, à tout moment, de retrouver l'énoncé précis du résultat auquel on souhaite aboutir, et d'isoler les hypothèses utiles à chaque étape du raisonnement. Ensuite, cela

permet de réutiliser dans la suite de la planche les questions déjà traitées (ce qui est assez courant). Enfin, ne pas faire ce que demande le jury démontre soit une capacité de communication limitée, soit une témérité inattendue lors d'une épreuve orale.

- La gestion du tableau est une compétence évaluée, au moins indirectement, par le jury : des candidats se sont retrouvés bloqués au cours de la planche du fait d'avoir effacé une partie de leurs résultats, et ce malgré les protestations de l'interrogateur. D'autres ont perdu un temps précieux à réécrire plusieurs fois des raisonnements déjà effectués lors des questions précédentes mais effacés par la suite sans en garder de trace. Se forcer à présenter correctement son tableau, c'est aussi s'assurer d'avoir à tout moment la structure de l'exercice en tête.
- Certains candidats ne tiennent pas compte des pistes fournies par l'examinateur au cours de l'épreuve. Le but du jury n'est pas d'embrouiller le candidat ou de le lancer sur de fausses pistes, mais bien de le guider dans la résolution d'exercices parfois difficiles. Ces pistes même si elles n'évoquent rien immédiatement au candidat doivent néanmoins faire l'objet d'investigation. Par ailleurs, les capacités d'écoute et de communication font partie des compétences attendues par le jury.
- De manière similaire, la première question de l'exercice fournit, dans bon nombre de cas, une indication devant être utilisée dans la suite de l'exercice, et il est assez regrettable que certains candidats ne songent alors pas à exploiter cette première question. A contrario, certains candidats cherchent par tous les moyens à traiter la question 2 à l'aide de la question 1. Les questions ne sont pas nécessairement imbriquées les unes dans les autres. Il est davantage attendu du candidat qu'il adopte une posture de recherche active en réfléchissant au problème qui lui est posé plutôt que d'essayer de faire intervenir artificiellement un résultat préliminaire.
- À tout moment de l'oral le jury peut être amené à poser des questions très simples autour du cours ou de cas particuliers. C'est tout à fait normal et cela ne présage en rien de la réussite de la personne interrogée, mais vise à évaluer de manière la plus complète possible sa maîtrise. Cela peut aussi constituer une indication (à demi) cachée pour la résolution de l'exercice, que ce soit par l'utilisation directe de la propriété demandée ou bien de son idée de preuve. Certains candidats ont été mis en défaut sur ces questions. Il est crucial de rappeler que le cours doit être maîtrisé.
- Le jury apprécie grandement les candidats et candidates qui, lorsqu'ils sèchent sur une question, proposent d'eux même de considérer des cas simples (le plus souvent il s'agit de traiter le cas $n = 2$ avant de s'attaquer à des n quelconques, que n soit une dimension, un cardinal ou un paramètre). Il est assez rare que les personnes interrogées osent simplifier un énoncé difficile, or quand elles le font l'initiative est souvent couronnée de succès et débouche sur une preuve générale. Lorsqu'une telle simplification devient triviale et ne permet pas d'avancer sur le cas général, le jury apprécie aussi que les candidats s'en rendent compte d'eux-mêmes.
- Au contraire, certains candidats essaient de résoudre la question posée en cherchant exhaustivement une astuce qui permettrait une solution immédiate et lucrative en termes de note finale. Comme nous l'avons déjà dit, nous ne cherchons pas à évaluer de telles astuces. Les exercices proposés ne sont pour ainsi dire jamais « à astuce », mais demandent une certaine imprégnation de l'énoncé et des notions mises en jeu, à l'instar de presque tous les problèmes de recherche. Ils nous permettent de tester des qualités qui feront des futurs normaliens et normaliennes de bons enseignants et enseignantes, et de bons chercheurs et chercheuses : compréhension profonde des objets manipulés (qui constitue un prérequis aux compétences pédagogiques) et capacités d'adaptation face à un problème nouveau. Les

rares exercices présentant une « astuce » ont fait l'objet d'indications claires et précises dans l'énoncé ou bien directement par l'examinateur le cas échéant.

- Les exercices font parfois intervenir des objets ne tombant pas directement dans le programme (par exemple, des EDO non linéaires). Dans ce cas, le jury est bien conscient de ce fait, et aucune connaissance hors programme n'est attendue des candidats. Le but de telles questions est de voir comment l'aspirant normalien réagit face à la nouveauté ou à un cadre original. Les énoncés sont conçus pour pouvoir être résolus grâce à une réflexion ne faisant intervenir que des notions connues des candidats. De même il est rappelé qu'un étalage de connaissance hors-programme ne fait gagner aucun point supplémentaire. Les quelques candidats s'y étant risqué ont au contraire mis en avant une difficulté à se concentrer sur une problématique donnée et à identifier de façon précise les connaissances nécessaires à la résolution de l'exercice, voire se sont enfermés dans des résultats hors-programmes dont ils avaient connaissance mais qui orientait dans une mauvaise direction pour la résolution de l'exercice.
- Le niveau des exercices proposés étant relativement hétérogène, il est compensé par la quantité d'indications fournies par le jury. Les candidats ne doivent donc pas s'inquiéter si l'examinateur a tendance à leur en fournir régulièrement : cela peut simplement signifier que l'exercice proposé est difficile et nécessite un soutien régulier du jury pour y progresser dans les 45 minutes imparties. Il est par ailleurs important de noter que les exercices ne sont pas nécessairement pensés pour pouvoir être terminés dans le temps imparti, et de très rares candidat sont parvenus à bout de leur planche.

Exemples d'exercices donnés

Pour illustrer quelques-uns de ces points, voici des exemples d'exercices proposés lors des épreuves orales. Pour certains exercices, seules les premières questions étaient données aux candidats au début de l'oral.

Exercice 1.

1. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ définie par la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$.*

   Montrer que cela définit bien de manière unique la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que ces polynômes ont des coefficients entiers.
2. *Donner la liste des valeurs rationnelles possibles de $\cos(r\pi)$ si $r \in \mathbb{Q}$.*
   - (a) *On pourra commencer par montrer que si $\frac{p}{q}$ est un rationnel (écrit sous forme réduite) qui est racine d'un polynôme à coefficients entiers, alors q divise le coefficient dominant de ce polynôme.*
   - (b) *Montrer que T_n est unitaire.*
   - (c) *Pour k, n entiers fixés, non nuls, trouver un polynôme à coefficients entiers qui annule $2\cos(\frac{k}{n}\pi)$.*
   - (d) *Conclure.*
3. *Que peut-on dire d'un triangle dont tous les côtés ont des longueurs rationnelles et tous les angles sont des multiples rationnels de π ?*
4. *Donner la liste des valeurs possibles de $\cos(r\pi)$ si $r \in \mathbb{Q}$ qui s'écrivent sous la forme $\frac{\sqrt{a}}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$.*

Commentaires. La première question de cet exercice a été plutôt discriminante, le jury a été surpris de voir la plupart des candidats développer la formule de Moivre, pour ne se rendre compte qu'après que la formule de récurrence est beaucoup plus efficace pour montrer que les coefficients sont entiers.

Les sous-questions de la seconde question étaient posées au candidat à la discrétion de l'examinateur, selon les idées exprimées par le candidat pour le guider. Le jury n'a, par exemple, presque pas eu besoin de poser les question 2(b) et 2(c), la plupart des candidats ayant atteint ce point se sont posés la question seuls et cela a été apprécié.

Les questions suivantes, quand elles ont été atteintes dans le temps de l'oral, ont été bien traitées, avec différentes preuves de la formule d'Al-Kashi à l'appui.

Exercice 2. *Soit* $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. *Déterminer le spectre de* J.
2. *Soit maintenant* $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique définie positive. Justifier qu'il existe* B *symétrique définie positive telle que* $A = B^2$.
3. *Que dire de la matrice* BJB *?*
4. *Localiser le spectre de* JA.
5. *Même question en supposant que* A *est seulement symétrique positive.*

Commentaires.

La première question permettait de voir si le candidat avait le réflexe de chercher un polynôme annulateur lors de la recherche de valeurs propres, là où certains se sont lancés dans un calcul lourd de polynôme caractéristique. Un calcul direct des valeurs propres et vecteurs propres en utilisant la décomposition par blocs était également une piste fructueuse.

La seconde question se traitant rapidement en invoquant le théorème spectral, elle a été l'occasion pour le jury de vérifier la maîtrise des démonstrations du programme par les candidats, par exemple en demandant de démontrer l'équivalence, pour une matrice symétrique réelle, entre le caractère défini positif et le fait que les valeurs propres sont toutes strictement positives.

Les troisièmes et quatrième questions allaient de pair, et faisaient s'aventurer le candidat en direction du hors-programme. Il s'agissait essentiellement de démontrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle sont imaginaires pures. Beaucoup de candidats ont de prime abord établi que ces valeurs propres devaient être nulles, avant de réaliser qu'un certain « produit scalaire » n'en était pas un, à cause de la présence de nombres complexes. L'introduction d'un conjugué, et par là même d'un produit hermitien, notion hors-programme, résolvait le problème. La compréhension des difficultés liées à la présence de nombres complexes, puis la réflexion menant à une solution, ont été discriminantes lors de l'évaluation des candidats.

Enfin, la dernière question, plus difficile, permettait de voir les réflexes des candidats face à une question ouverte. Comprendre où la démonstration précédente échouait demandait une capacité de rigueur qui a été valorisée, de même que l'idée de penser à un raisonnement par passage à la limite.

Exercice 3. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé sur lequel on suppose définies toutes les variables aléatoires étudiées dans ce sujet.*

On considère un marcheur qui se déplace aléatoirement sur un axe gradué par les entiers naturels où le temps est lui aussi mesuré par les entiers naturels. On suppose que :

— *à l'instant* 0, *le marcheur est situé au point d'abscisse* 0 *de l'axe ;*

— *si, à un instant donné, le marcheur est situé au point d'abscisse* $k \in \mathbb{N}$, *alors à l'instant d'après il sera situé au point d'abscisse* $k+1$, *avec la probabilité* $\frac{1}{2}$ *ou au point d'abscisse* $k+2$, *avec la probabilité* $\frac{1}{2}$ *;*

— *les déplacements entre chaque instants sont indépendants.*

Plus précisément, on considère une suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur* $\{1,2\}$ *et modélisant les déplacements successifs du marcheur puis une suite* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires modélisant la position du marcheur à chaque instant définie par* $P_0 = 0$ *et* $\forall n \geq 0,\ P_{n+1} = P_n + D_{n+1}$.

1. (a) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *calculer l'espérance et la variance de* P_n.

   (b) *Justifier que pour tout* $\epsilon > 0$, *on a* $\mathbb{P}\left(|P_n - \frac{3n}{2}| \geq n\epsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (c) *Mieux, démontrer que pour tout* $\epsilon > 0$, *on a* $\mathbb{P}\left(|P_n - \frac{3n}{2}| \geq n^{2/3}\epsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on définit* X_n *la variable aléatoire égale au nombre minimum de déplacements nécessaires pour atteindre ou dépasser le point d'abscisse* n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \inf\left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; P_k \geq n \right\}.$$

2. (a) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *déterminer le support* $X_n(\Omega)$ *de* X_n.

   (b) *Montrer que pour tout entier* $n \geqslant 2$ *et pour tout entier* $k \geqslant 1$

   $$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-2} = k-1).$$

   (c) *En déduire que, pour tout entier* $n \geqslant 2$

   $$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{n-2}) + 1.$$

   (d) *Déterminer un réel* x *tel que la suite* $(\mathbb{E}(X_n) - nx)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. En déduire une expression explicite de* $\mathbb{E}(X_n)$.

Commentaires.

Les trois premières questions de cet exercice étaient une mise en route pour le candidat et elle a globalement bien été traitée. Elle nous a tout de même permis de dores et déjà constater le niveau d'aisance du candidat avec les probabilités. La deuxième question a souvent été traitée directement avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev plutôt qu'avec la loi faible des grands nombres ce qui n'a pas été pénalisant.

La quatrième question (question 2.a) a été très discriminante. Bon nombre de candidats ont trouvé rapidement l'intuition du résultat mais ont manqué cruellement de réflexes afin de le prouver rigoureusement au tableau. Pour la plupart, ils n'ont donc pas (ou peu) eu le temps de se pencher sur les dernières questions.

Les outils probabilistes semblent assimilés chez l'ensemble des candidats mais leur aisance à les manipuler les permettant d'aller plus ou moins loin dans l'exercice a été déterminante.

Exercice 4.

1. *Soit* $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$. *Établir une formule pour développer* $(a_1 + \cdots + a_N)^p$.
2. *On considère une suite* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ *de variables de Rademacher i.i.d. de paramètre* $\frac{1}{2}$. *On définit*

   $$X := \sum_{j=1}^{N} a_j \varepsilon_j(\omega).$$

   Montrer que

   $$\mathbb{E}[|X|^{2p}] \leq p^p \mathbb{E}[|X|^2]^p.$$

3. *On suppose que* $a_1^2 + \cdots + a_N^2 = 1$. *On considère la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_\omega(x) = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(\omega) a_j \cos(jx).$$

Soit $1 \leq p < +\infty$ *un entier. Montrer qu'il existe* $\omega_0 \in \Omega$ *tel que*

$$\int_0^{2\pi} |f_{\omega_0}|^{2p} \mathrm{d}x \leq 2\pi p^p.$$

Commentaires.

La première question demandait d'établir une généralisation du binôme de Newton (dans le cas $N = 2$), et le fait de vérifier sa formule finale avec les cas $N = 1$ et $N = 2$ a été apprécié. Plusieurs pistes fructueuses ont été explorées : une récurrence sur N, ou bien un argument de dénombrement pour regrouper les termes identiques apparaissant lorsque l'on développe le produit des sommes. Cette question technique demandait d'introduire proprement les différents indices de sommation puis de les manipuler sans se tromper, ce qui a causé des difficultés à certains candidats.

La deuxième question a été discriminante. Elle nécessitait de commencer par développer $|X|^{2p}$ en remarquant que $|X|^{2p} = X^{2p}$, ce qui permettait d'utiliser la question précédente. La possibilité ou non d'enlever la valeur absolue a provoqué de nombreux doutes chez les candidats. Par ailleurs, plusieurs candidats se sont précipités pour majorer l'espérance le plus vite possible, par exemple en utilisant l'inégalité triangulaire, avant de bien comprendre les différents termes composant $|X|^{2p}$. Cette stratégie conduisait à une borne supérieure largement insuffisante pour conclure. Le jury a été surpris d'observer que le lien entre espérance et indépendance de variables aléatoires n'était pas toujours maîtrisé.

La troisième question a été traitée par peu de candidats. Le fait de penser à considérer l'espérance sur ω de $\int_0^{2\pi} |f_\omega|^p \mathrm{d}x$ pour conclure est une idée non standard, qui a été valorisée.

Exercice 5.

1. *Soient* x *et* y *des vecteurs non nuls de* $K^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(K)$.
   (a) *Donner la forme des matrices de rang 1 en termes de vecteurs de* $\mathcal{M}_{n,1}(K)$.
   (b) *Déterminer les valeurs propres de* $M = x^t y \in \mathcal{M}_n(K)$ *en fonction de* $\mathrm{tr}(M)$.
   (c) *Calculer le déterminant* $\det(I_n + x^t y)$.
2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(K)$. *Soient* $x, y \in K^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(K)$. *Montrer que, pour toute matrice* M,

$$\det(M + x^t y) = \det(M) + {}^t y \cdot \left({}^t\mathrm{com}(M) x\right).$$

Commentaires.

Cet exercice, assez élémentaire concernant les objets manipulés, a dérouté de nombreux candidats. La première question demandait de discuter de la forme des matrices de rang un ; si de nombreux candidats peuvent donner la forme matricielle d'une telle matrice, réussir à sortir de ce formalisme pour raisonner en termes de vecteurs (et les voir sous la forme $x^t y$) a été fastidieux, même après suggestions très explicites.

Exprimer la trace en fonction des données (à savoir les vecteurs x et y), reconnaissant le produit scalaire usuel ${}^t y x$, a également montré peu d'aisance avec la compréhension d'un formalisme nouveau. La discussion a toutefois généralement permis aux candidats de se rendre compte de ces relations. La question sur le déterminant n'a pas posé de problème particulier ; toutefois certains candidats doivent retrouver le fait que le spectre de $I_n + M$ est le spectre de M translaté de 1, et les justifications de ce fait ne sont pas aussi fluides qu'on pourrait l'espérer.

Enfin, la factorisation par la matrice M dans le cas général et l'utilisation *in fine* de la densité de l'ensemble des matrices inversibles a été bien traitée, montrant des questions assez habituelles. Le peu de manipulations techniques à réaliser a une fois de plus été gênant pour plusieurs candidats.