ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2023

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve se compose de 3 exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

Exercice 1

Deux estimations de dérivées n-ièmes.

Si $f\ : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \operatorname{sinc}(0) = 1.$$

1. Démontrer que la fonction sinc est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on note $\alpha(x) = \cos(\sqrt{x})$.
   (a) Démontrer que la fonction α se prolonge en une unique fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
   On note encore $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi prolongée.
   (b) Déterminer l'expression de α sur $\mathbb{R}^-$ à l'aide de fonctions usuelles.
3. Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\operatorname{sinc}^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   en remarquant que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sinc}(x) = \int_0^1 \cos(tx)\,\mathrm{d}t.$$
   Cette inégalité est due à Gronwall (1913).

   La suite de l'exercice consiste à démontrer une inégalité analogue pour la fonction α, *due à Smirnov (2018).*
4. Démontrer que α est l'unique fonction développable en série entière vérifiant :
$$\alpha(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ 4x\,\alpha''(x) + 2\alpha'(x) + \alpha(x) = 0.$$
5. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ 4x\,\alpha^{(n+1)}(x) + (4n-2)\alpha^{(n)}(x) + \alpha^{(n-1)}(x) = 0.$$
6. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que
$$|\alpha^{(n)}(x_n)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |\alpha^{(n)}(x)|.$$
7. En déduire *l'inégalité de Smirnov* :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |\alpha^{(n)}(x)| = \frac{n!}{(2n)!}.$$
   Indication : on pourra raisonner par récurrence et distinguer les cas $x_n = 0$ et $x_n > 0$.

Exercice 2

Un théorème de Pólya.

Soit d un entier $\geqslant 1$. On note $(e_1, \dots, e_d)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
Soit $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(e_1, e_2, \dots, e_d, -e_1, -e_2, \dots, -e_d)$ et de même loi définie par

$$\forall i \in [\![1, d]\!],\ \mathbb{P}(\varepsilon_n = e_i) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -e_i) = \frac{1}{2d}.$$

On note $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$.

On note

$$A = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} (S_k = 0).$$

1. Pour $\omega \in A$, que peut-on dire de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid S_n(\omega) = 0\}$?
2. Démontrer que si la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$ converge, alors $\mathbb{P}(A) = 0$.
3. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$ diverge. On note $B = \overline{A}$ le complémentaire de A.
   (a) Pour $\omega \in B$, que peut-on dire de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid S_n(\omega) = 0\}$?
   (b) Pour tout n, on note $B_n = (S_n = 0) \cap (\forall k > n,\, S_k \neq 0)$. Exprimer B à l'aide des B_n.
   (c) En remarquant que $B_n = (S_n = 0) \cap (\forall i > 0,\, \varepsilon_{n+1} + \cdots + \varepsilon_{n+i} \neq 0)$, montrer qu'il existe un réel α indépendant de n tel que $\mathbb{P}(B_n) = \alpha \mathbb{P}(S_n = 0)$.
   (d) En déduire $\mathbb{P}(A)$.
4. (a) On suppose dans cette question que $d = 1$.
   Déterminer $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. En déduire, en utilisant la formule de Stirling, la nature de la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$.
   Qu'en déduit-on ?
   (b) Traiter de même le cas $d = 2$.

Commentaires : on dit que la marche aléatoire (S_n) est récurrente si $\mathbb{P}(A) = 1$, transiente si $\mathbb{P}(A) = 0$. On peut démontrer à l'aide des résultats précédents que si $d \geqslant 3$, la marche aléatoire (S_n) est transiente. Ces résultats sont dus à Pólya (1921).

Exercice 3

Sur l'exponentielle matricielle.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul fixé.
Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on rappelle que l'on définit l'exponentielle e^A de la matrice A par

$$e^A = \sum_{k \geqslant 0} \frac{A^k}{k!} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Calculer e^A lorsque A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et de spectre complexe inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.
2. Montrer que :
$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2,\ AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B.$$
3. Soient
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2i\pi & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Calculer e^A, e^B, e^{A+B}, AB et BA.
   Commenter.
4. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.
   (a) Soient $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ et $g : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ définies par
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{t(A+B)} \text{ et } g(t) = e^{tA} e^{tB}.$$
   Calculer $f''(0)$ et $g''(0)$.
   (b) On suppose que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} e^{tB} = e^{t(A+B)}.$$
   Montrer que $AB = BA$.
5. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.
   Montrer que $e^N - I_n$ est nilpotente.

T.S.V.P.

6. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\big(e^{tN} - I_n\big)^k}{k}.$$

   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = N$.

   (b) En déduire que

$$N = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\big(e^{N} - I_n\big)^k}{k}.$$

   (c) En déduire enfin qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, indépendant de la matrice nilpotente N, tel que $N = P\big(e^N\big)$.

   (d) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M = \lambda I_n + N$.
   Montrer qu'il existe $Q_\lambda \in \mathbb{C}[X]$, ne dépendant que de λ, tel que $M = Q_\lambda\big(e^M\big)$.

7. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que pour tout $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow \lambda - \mu \notin 2i\pi\mathbb{Z}$.
   Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ les valeurs propres distinctes de M et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ leurs multiplicités respectives comme racines du polynôme caractéristique de M.

   (a) Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}\big((M - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}\big).$$

   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$,

$$\mathrm{Ker}\big((M - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}\big) \subset \mathrm{Ker}\big((e^M - e^{\lambda_k} I_n)^{\alpha_k}\big)$$

   (c) Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}\big((e^M - e^{\lambda_k} I_n)^{\alpha_k}\big)$$

   et que

$$\forall k \in [\![1, r]\!],\ \mathrm{Ker}\big((e^M - e^{\lambda_k} I_n)^{\alpha_k}\big) = \mathrm{Ker}\big((M - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}\big).$$

   (d) En déduire que toute matrice A commutant avec e^M commute avec M. *Indication : on pourra raisonner à l'aide des endomorphismes de* $\mathbb{C}^n$ *canoniquement associés à* A *et à* M *et utiliser* 6(*d*).

8. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $e^{AB} = e^{BA}$ et que pour tout tout $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(AB)$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow \lambda - \mu \notin 2i\pi\mathbb{Z}$.

   (a) Montrer que B et e^{AB} commutent.

   (b) En déduire, en utilisant 7(d), que $AB = BA$.

9. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2i\pi & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calculer AB, BA, e^{AB} et e^{BA}.
   Commenter.