ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2024

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à fonctionnement autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé.

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet comprend deux parties indépendantes. La première propose un questionnaire de connaissance générale en physique et la seconde une étude de problème. Le poids de la première partie est plus important que celui de la seconde.

Partie A
Questionnaire de physique

On formulera les réponses aux dix questions qui suivent de façon claire, précise et concise. Il n'est pas attendu de justification des réponses données, ni de définition des notations introduites.

1. Énoncer les conditions de Gauss, en optique géométrique.

2. Indiquer ce qu'est l'*effet tunnel*.

3. Indiquer ce qu'est un système interférentiel spatialement cohérent.

4. Énoncer le second principe de la thermodynamique.

5. Écrire la relation de dispersion associée à une équation de diffusion.

6. Donner l'expression de la force d'inertie de Coriolis.

7. Donner l'ordre de grandeur de la puissance surfacique reçue, au niveau de la Terre, de la part du Soleil.

8. Indiquer ce qui détermine, intrinsèquement, qu'un gaz est susceptible de participer à l'effet de serre.

9. Écrire l'équation (ou une équation) de Bernoulli et préciser son cadre d'hypothèses.

10. Représenter, dans le plan complexe, le diagramme des différences de potentiel se rapportant à un circuit (R, L, C) série alimenté par un générateur de tension harmonique.

Partie B
Problème de physique
Étude de l'évolution d'un front de solidification

Cette étude comprend deux parties. La première, après quelques considérations générales, propose une analyse de la progression du front de solidification de l'eau dans le cas où sa pression reste fixée. La seconde s'intéresse à la situation pour laquelle le volume occupé par l'eau (sous ses deux phases) est fixé. Il est conseillé d'aborder la première partie avant la seconde.

Nous considérons un tube cylindrique étanche, supposé *indéformable*, dont la surface latérale est *idéalement calorifugée*. L'une de ses extrémités est en contact avec un thermostat fixant sa température à $T_c = 0\,°\mathrm{C}$. L'autre est en contact avec un thermostat fixant sa température à T_f telle que $T_f < T_c$. Dans la situation initiale ($t = 0$), ce tube est entièrement rempli d'eau liquide à la température T_c, sous la pression $P_0 = 10^5$ Pa.

Nous supposons que la température de l'eau, sous chacune de ses phases, ne dépend que de l'abscisse x de la section considérée et, par ailleurs, qu'elle est continue sur toute la longueur du tube ainsi qu'en $x = 0$ et $x = L$. La pression est supposée uniforme dans tout le volume du cylindre. Nous notons $s = s(t)$ ($s \in [0, L]$) l'abscisse du front de solidification de l'eau, à l'instant t. La figure (**1**) représente le système étudié.

Nous nous proposons, en particulier, de caractériser l'état final de l'eau.

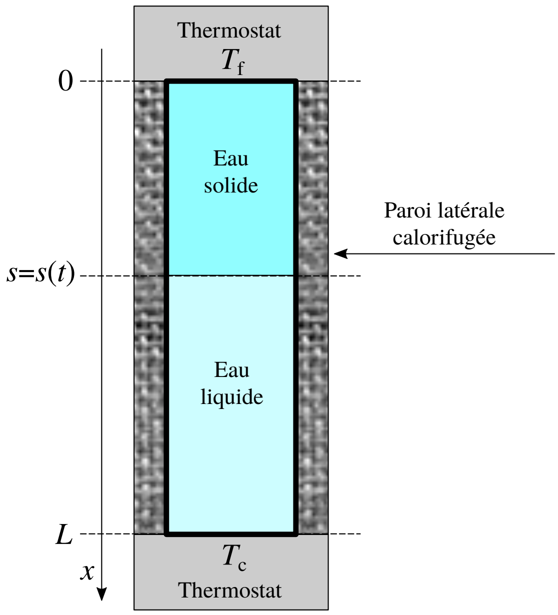

FIGURE **1** – Tube étanche et indéformable contenant (exclusivement) de l'eau sous ses phases liquide et solide ($T_f < T_c = 0\,°\mathrm{C}$). L'abscisse $s = s(t)$ ($s \in [0, L]$) situe le front de solidification de l'eau.

- **Notations, données et formulaire.**

Les valeurs se rapportant aux caractéristiques de l'eau seront considérées comme indépendantes de sa température et de sa pression.

- Section du tube : $S = 10\ \mathrm{cm}^2$
- Longueur du tube : $L = 1$ m
- Température du thermostat froid : $T_f = -10\,°\mathrm{C}$
- Température du thermostat chaud : $T_c = 0\,°\mathrm{C}$
- Écart de température : $\Delta T = T_c - T_f$
- Conductivité thermique de l'eau solide : $\lambda_s = 2{,}2\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$
- Conductivité thermique de l'eau liquide : $\lambda_l = 0{,}6\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$

- Capacité calorifique massique de l'eau solide : $c_s = 2{,}1\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
- Capacité calorifique massique de l'eau liquide : $c_l = 4{,}2\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
- Masse volumique de l'eau solide : $\rho_s = 920\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
- Masse volumique de l'eau liquide : $\rho_l = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
- Module de YOUNG de l'eau solide : $E_s = 9{,}3$ GPa
- Compressibilité de l'eau liquide : $\chi_l = 5 \times 10^{-10}\ \mathrm{Pa^{-1}}$ $(E_l = 1/\chi_l = 2{,}0\ \mathrm{GPa})$
- Enthalpie massique, ou chaleur latente, de fusion de l'eau : $\Delta H^0 = 334\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$
- L'équation aux dérivées partielles de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur), en géométrie unidimensionnelle, prend la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{où} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{\text{conductivité thermique}}{\text{masse volumique} \times \text{capacité calorifique massique}} \tag{1}$$

- La loi de HOOKE, dans le cas d'une sollicitation en traction-compression uni-axiale, relie la contrainte σ (force par unité de surface) appliquée à un élément cylindrique d'un matériau à son allongement relatif ε. Elle fait intervenir le module de YOUNG (ou d'élasticité longitudinale) E du matériau et s'exprime selon la relation suivante :

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \tag{2}$$

  ℓ_0 est la longueur de l'élément lorsqu'il n'est soumis à aucune contrainte et ℓ sa longueur lorsqu'il est soumis à la contrainte σ.

  Cette relation n'est applicable que dans la limite de la réponse linéaire du matériau (limite des "faibles" déformations).

1 Analyse préliminaire.

Dans cette partie, nous étudions l'évolution du système diphasique en supposant que sa pression reste constante, égale à P_0.

1. Indiquer quel est le processus responsable des échanges thermiques dans un solide.

2. Indiquer quel est le processus généralement responsable des échanges thermiques dans un liquide.

3. Proposer une représentation de l'allure graphique de la dépendance de la température $T = T(x,t)$ vis-à-vis de l'abscisse x, à un instant t donné. Nous supposerons que la température reste uniforme dans la phase liquide.

4. Effectuer un bilan énergétique, au niveau de l'interface solide-liquide, appliqué à une masse $\mathrm{d}m$ d'eau qui transite de la phase liquide à la phase solide, sur l'intervalle de temps $[t, t + \mathrm{d}t]$. Déduire de ce bilan une relation faisant intervenir la vitesse de progression $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ du front de solidification.

Ce bilan sera établi en considérant que la phase liquide n'est traversée par aucun flux thermique, quelle qu'en soit l'origine.

- Nous considérons, *a priori*, que le régime de diffusion thermique, dans la phase solide, est quasi-stationnaire. Nous désignons cette hypothèse par l'abréviation (HQS).

5. Sous cette hypothèse, établir l'expression $T = T(x,t)$ de la température dans la phase solide (la dépendance temporelle ne se manifeste qu'implicitement, par l'intermédiaire de la variable s).

6. Établir alors que l'abscisse $s = s(t)$ du front de solidification suit l'évolution temporelle suivante :

$$s(t) = \sqrt{At} \tag{3}$$

On donnera l'expression du coefficient A en fonction des paramètres ρ_s, λ_s, ΔH^0 et ΔT.

7. En déduire l'expression du temps τ nécessaire au passage en phase solide de l'ensemble du volume d'eau. Calculer sa valeur et commenter brièvement ce résultat.

8. Le temps τ ne dépend pas de la section S du tube. En indiquer la raison.

- Il s'agit maintenant de définir à quelle condition l'hypothèse (HQS) adoptée reste acceptable.

9. Définir, sur la base de l'équation (1), un temps caractéristique de diffusion thermique, dans la phase solide, sur une longueur égale à s. Nous le noterons τ_{diff} et ferons apparaître la constante $D_s = \lambda_s/(\rho_s c_s)$.

10. Définir, à partir de la relation (3), un temps caractéristique propre à l'évolution du front de solidification. Nous le noterons τ_s et l'exprimerons en fonction de A et s.

11. Indiquer à quelle condition, portant sur τ_{diff} et τ_s, l'hypothèse (HQS) est satisfaite. La traduire sur les grandeurs ΔH^0, c_s et ΔT en les faisant intervenir dans un rapport dont on comparera la valeur à l'unité.

12. Cette condition peut-elle être considérée comme étant vérifiée, dans le cas de la situation étudiée ?

2 Étude dans le cas où le volume du tube reste constant.

Dans cette partie, nous considérons que la longueur L et la section S du tube restent constantes. L'eau, au cours de son changement d'état, est alors contrainte à occuper un volume fixé.

13. Sachant que $\rho_s < \rho_l$, indiquer quelles sont les conséquences de cette contrainte, par rapport à la situation précédemment étudiée.

- Il s'agit, dans une première étape, de caractériser l'état mécanique du système diphasique correspondant à l'abscisse s du front de solidification. Nous notons $\mathrm{A} = \mathrm{A}(P, L, s)$ cet état, où P désigne la pression de l'eau. Nous imaginons atteindre cet état, depuis la situation initiale $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}(P_0, L, 0)$, en transitant par un état intermédiaire $\mathrm{A}' = \mathrm{A}(P_0, L', s')$, l'évolution $\mathrm{A}_0 \rightarrow \mathrm{A}'$ s'effectuant à pression constante, égale à P_0 (c'est-à-dire sans fixer le volume occupé par le système diphasique).

Cette succession de trois états est illustrée sur la figure (2). Pour une abscisse s fixée, ce paramétrage fait intervenir trois inconnues ; s', L' et P. Cette dernière nous intéresse particulièrement.

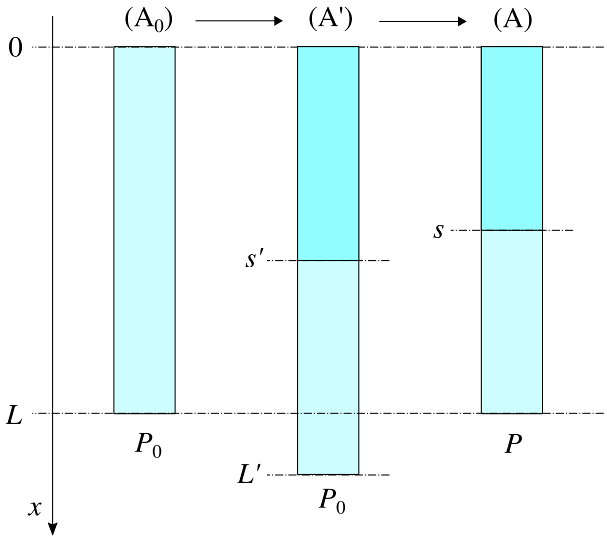

FIGURE 2 – Passage de l'état initial A_0 à l'état final A, paramétré par l'abscisse s du front de solidification, par l'intermédiaire de l'état A'.

Nous posons $k = \rho_s/\rho_l$, $\alpha = E_s/E_l$ et $u = s/L$ ($u \in [0, 1]$).

Dans cette analyse, nous ne considérons que l'aspect mécanique et supposons, *a priori*, que la relation (2) est applicable. Les conséquences thermodynamiques subséquentes seront étudiées dans une seconde étape.

14. Établir la relation liant la différence de longueur $L' - L$ à s' et k.

15. Exprimer, sur la base des paramètres E_s, E_l, L, L', s et s', la différence de pression $\Delta P = P - P_0$, d'une part en considérant la phase solide, d'autre part en considérant la phase liquide. On choisira, comme longueurs de référence, celles se rapportant à l'état $\mathrm{A}(P, L, s)$, c'est-à-dire s et $L - s$.

16. À partir des trois équations que nous venons d'établir (questions (**14**) et (**15**)), exprimer s' en fonction de α, k, L et s. Exprimer ensuite le rapport s'/s en fonction de α, k et u.

17. En déduire l'expression de la différence de pression ΔP. Vérifier qu'elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\Delta P}{E_\mathrm{s}} = \frac{(1-k)u}{(k-\alpha)u + \alpha} \tag{4}$$

18. Représenter l'allure graphique de la dépendance de la fonction $Y = \Delta P / E_\mathrm{s}$ vis-à-vis de la variable u.

Indiquer pour quelle raison la longueur L n'intervient pas dans l'expression de Y.

19. Estimer la valeur de la différence de pression maximale ΔP_max, puis celle de la force axiale maximale F_max que le tube est susceptible de devoir supporter. Commenter brièvement ces résultats.

20. Exprimer l'allongement relatif $\varepsilon = (L' - L)/L$ du cylindre d'eau (phases liquide et solide), en fonction de α, k et u. Cet allongement relatif correspond à l'état intermédiaire E'.

21. Calculer la valeur maximale ε_max de cet allongement relatif. L'utilisation de la relation linéaire de Hooke (équation (**2**)) semble-t-elle alors justifiée ?

• Il s'agit à présent d'envisager les conséquences thermodynamique de l'augmentation de pression accompagnant le progression du front de solidification de l'eau. La figure (**3**) représente le diagramme de phase de l'eau dans le plan (T, P).

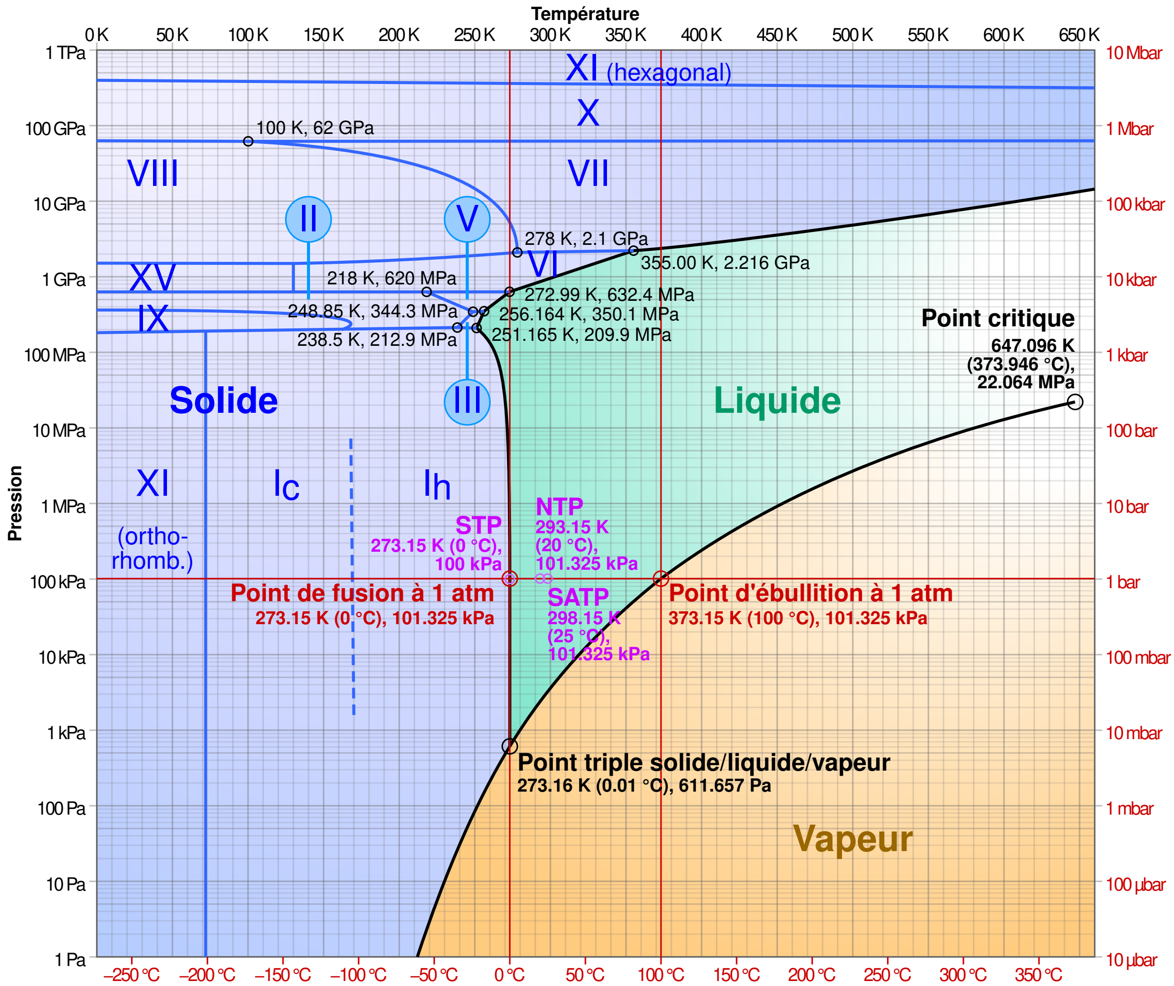

FIGURE **3** – Diagramme de phase de l'eau – Référence : OLIVIER DESCOUT, CC BY-SA 3.0 <https ://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>, *via* WIKIMEDIA Commons.

22. Nous caractérisons la frontière solide-liquide de l'eau par l'équation $P = P(T)$. À partir des coordonnées du point triple et de celles du point de fusion sous la pression atmosphérique, estimer l'ordre de grandeur de la valeur de la dérivée $a = -\mathrm{d}P/\mathrm{d}T$. On ne donnera qu'un chiffre significatif.

En déduire l'équation de cette frontière que l'on assimilera à une portion de droite. On l'écrira en faisant intervenir la différence de pression $\Delta P = P - P_0$ et la température T_c.

23. Nous nous intéressons à l'état stationnaire du système diphasique caractérisé par l'abscisse $s(t \to \infty)$ (que nous noterons simplement s) du front de solidification. Nous notons $u = s/L$. Par ailleurs, nous supposons que le flux thermique traversant la phase liquide est d'origine conductive (les phases liquide et solide se comportent donc thermiquement de la même manière).

Écrire les trois équations mettant en relation les trois inconnues s (ou u), ΔP et $T(s)$ (ou $T(u)$).

24. Nous posons $\beta = \lambda_\mathrm{s}/\lambda_\mathrm{l}$ et $e = a\Delta T/E_\mathrm{s}$. Les équations établies précédemment conduisent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} Y_1(u) = \beta e\,\dfrac{1-u}{(1-\beta)u+\beta} & \text{(considération thermodynamique)} \\ Y_2(u) = \dfrac{(1-k)u}{(k-\alpha)u+\alpha} & \text{(considération mécanique)} \\ Y_1(u) = Y_2(u) = \dfrac{\Delta P}{E_\mathrm{s}} & \end{cases} \tag{5}$$

Les fonctions $Y_1 = Y_1(u)$ et $Y_2 = Y_2(u)$ sont représentées graphiquement sur la figure (4).

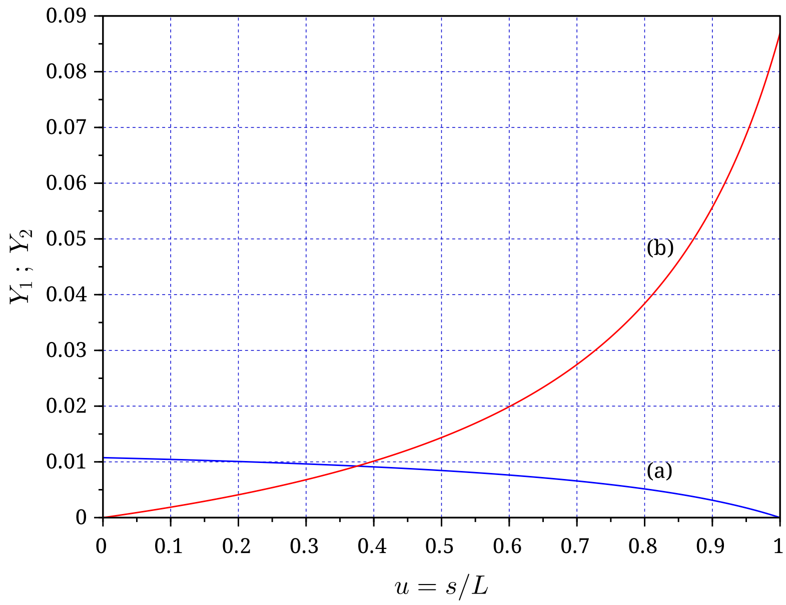

FIGURE 4 – Représentation graphique de chacune des fonctions $Y_1 = Y_1(u)$ et $Y_2 = Y_2(u)$.

Associer chacune des représentations graphiques (a) et (b) à une fonction Y_1 ou Y_2.

Estimer la valeur de u et celle de $\Delta P/E_\mathrm{s}$ correspondant à l'état stationnaire adopté par le système. Estimer ensuite la valeur du rapport $q = (T_\mathrm{c} - T(s))/(T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f})$. Analyser ces résultats.

25. L'égalité des potentiels chimiques des phases solide et liquide, en tout point de la frontière solide-liquide d'équation $P = P(T)$, conduit à la relation suivante, appelée relation de CLAPEYRON :

$$\Delta H^0 = T\left(\frac{1}{\rho_\mathrm{l}} - \frac{1}{\rho_\mathrm{s}}\right)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} \tag{6}$$

Vérifier que la valeur de la pente a estimée en réponse à la question (**22**) est cohérente avec cette relation.

⋆ ⋆
⋆