

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLE DES MINES DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2024

FILIÈRE BCPST
COMPOSITION DE PHYSIQUE

Épreuve commune aux ENS de Lyon, Paris, Paris-Saclay, à l'ENPC et aux mines de Paris

Durée : 4 heures

- *Le sujet de cette épreuve comprend 9 pages, numérotées de 1 à 9.*
- *L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*

* * *

Physique en milieux polaires

L'étude proposée comprend deux parties indépendantes. La première s'intéresse au processus de formation de la glace à la surface d'une étendue d'eau. La seconde concerne la dynamique d'écoulement des glaciers.

→ Les résultats des applications numériques, ainsi que les ordres de grandeur, seront donnés avec une précision qu'un calcul "à la main" permet aisément.

→ Les réponses aux questions, en particulier lorsqu'elles relèvent de considérations qualitatives, devront être systématiquement argumentées.

→ Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.

• Définition de paramètres et données numériques générales adoptées.

- Pression atmosphérique : $p_0 = 10^5$ Pa ;
- Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- Masse volumique de la glace : $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- Enthalpie massique de fusion de la glace à 0°C : $L_f = 300 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- Capacité thermique massique de la glace, à pression constante : $c = 2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- Conductivité thermique de la glace : $k = 2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$;
- 1 an = 3×10^7 s.

Les paramètres se rapportant à la glace sont supposés ne pas dépendre de la température (sur la gamme de température qui concerne les études conduites).

1 Premier problème : Étude du gel d'un lac.

Nous considérons un lac, de superficie S , dont l'eau est à température supposée uniforme $T_e = 0^\circ \text{C}$ (273 K) (c'est-à-dire à la température de fusion de la glace). La température de l'atmosphère, $T_a = T_e - \Delta T$ ($\Delta T \geq 0$), est supposée uniforme et constante.

La glace est considérée comme un "solide incompressible". Nous notons ρ sa masse volumique, k sa conductivité thermique, c sa capacité thermique massique (à pression constante) et L_f son enthalpie massique de fusion (chaleur latente de fusion). La pression dans l'atmosphère, la glace et l'eau est supposée uniforme et constante, fixée à p_0 .

Nous désignons par $T = T(z)$ (en régime stationnaire) la température de la glace à la profondeur z et par $e = e(t)$ l'épaisseur de glace formée à l'instant t . Nous adoptons les conditions limite et initiale suivantes : $T(z = 0) = T_0$ et $e(t = 0) = 0$.

Nous cherchons à accéder à la loi de croissance de l'épaisseur de glace en vue de déterminer le temps nécessaire à la formation d'une couche de glace d'épaisseur donnée.

La figure (1) représente le système atmosphère-glace-eau étudié et précise les notations adoptées dans cette étude.

1. Dédire, d'un bilan thermodynamique local que l'on définira, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T = T(z, t)$, dans le cas général. Nous posons $D = k/(\rho c)$.
2. Nous supposons (hypothèse qui sera discutée plus loin) que la diffusion de température dans la glace s'effectue en régime stationnaire¹, en dépit de l'évolution de l'épaisseur e . Déterminer, dans ces conditions, la dépendance $T = T(z)$ de la température vis-à-vis de z . Nous considérerons que $T(z = e(t)) = T_e$.
3. Exprimer le flux thermique $\phi(z)$ (grandeur algébrique) traversant la couche de glace en fonction de k , e , T_0 , T_e et S . Préciser quel est, dans la situation étudiée, le signe de ce flux.

1. Le terme de quasi-stationnaire serait plus approprié.

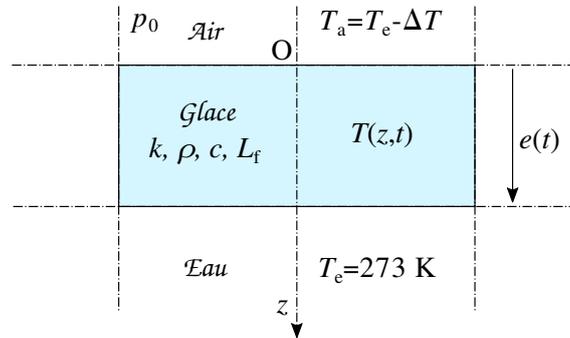


FIGURE 1 – Portion de couche de glace formée à la surface d’une étendue d’eau.

4. Nous admettons, qu’à l’interface air-glace, le flux thermique s’exprime selon la relation suivante :

$$\phi(z = 0) = S \times \gamma \times (T_a - T_0) \quad \text{où} \quad \gamma = \text{Cste} > 0 \quad (1)$$

Indiquer l’unité du coefficient γ , dans le Système international d’unités. Expliquer brièvement le processus physique traduit par cette équation.

5. Représenter l’allure du profil de température, depuis l’air jusqu’à l’eau. On y notera les différentes températures à considérer.

6. Établir que la température T_0 de la surface de la glace vérifie l’équation suivante :

$$T_0 - T_a = \frac{\Delta T}{1 + \Gamma} \quad \text{où} \quad \Gamma = \frac{\gamma e}{k} \quad (2)$$

7. Analyser, d’un point de vue physique, la dépendance de l’écart de température $T_0 - T_a$ vis-à-vis du rapport Γ . Il pourra être éclairant d’écrire ce rapport sous la forme suivante : $\Gamma = \gamma / (k/e)$ et d’identifier ce que représentent, d’une part γ , d’autre part k/e .

8. En $z = e(t)$ (interface glace-eau), l’eau du lac se solidifie et, pendant l’intervalle de temps $[t, t + dt]$, l’épaisseur de glace s’accroît de de . Effectuer un bilan enthalpique appliqué à une masse dm d’eau qui transite de la phase liquide à la phase solide, durant cet intervalle de temps. En déduire une relation entre $\frac{de}{dt}$ et $\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=e}$.

9. Établir que l’épaisseur $e = e(t)$ de glace est solution de l’équation suivante :

$$e^2(t) + ae(t) = D^* \times t \quad \text{où} \quad a = \frac{2k}{\gamma} \quad \text{et} \quad D^* = \frac{2k\Delta T}{\rho L_f} \quad (3)$$

Dans la suite, nous adopterons les valeurs suivantes : $a = 0,1 \text{ m}$ et $\Delta T = 25^\circ\text{C}$.

10. Donner l’expression approchée de la fonction $e = e(t)$ dans le cas où $e \ll a$ puis dans celui où $e \gg a$. Interpréter chacun de ces résultats.

11. Représenter l’allure graphique de la dépendance du rapport $Z = e/a$ vis-à-vis de la variable $T = (D^*/a^2)t$ (ou de la fonction réciproque $T = T(Z)$). On s’appuiera sur les réponses données à la question (10).

Indiquer quel est l’intérêt (différents aspects) d’utiliser ces nouvelles grandeurs Z et T .

12. Estimer (dans l’unité la plus adaptée) la valeur des temps t_1 et t_2 nécessaires à la formation des couches de glace d’épaisseur $e_1 = 1 \text{ cm}$ et $e_2 = 1 \text{ m}$. Estimer l’ordre de grandeur de l’épaisseur maximum atteignable sous un climat à deux saisons, froide et chaude. On tirera parti des réponses données à la question (10).

- Nous supposons à présent que la couche de glace est, dès sa formation, recouverte d’une couche de neige, d’épaisseur δ et de conductivité thermique $k_n = 0,3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. L’équation (1) est toujours vérifiée, mais elle se rapporte maintenant à l’interface entre la neige et l’atmosphère.

- 70 **13.** Expliquer brièvement l'origine de la différence entre la valeur de la conductivité thermique de la neige et celle de la glace (aucun calcul n'est demandé).
- 14.** Représenter l'allure du profil vertical de température $T = T(z)$, depuis l'air jusqu'à l'eau, toujours sous l'hypothèse que le transfert thermique de l'eau à l'air s'effectue en régime stationnaire. Indiquer quelle est la conséquence de la présence d'une couche de neige sur la dynamique de formation de la couche de glace (on pourra raisonner par le biais des résistances thermiques). Aucun calcul approfondi n'est attendu.
- 75
- Nous cherchons maintenant à évaluer le temps nécessaire à la fusion d'une couche de glace d'épaisseur initiale $e_0 = 1$ m, en contact avec de l'air à la température $T_a = 15^\circ\text{C}$. Nous supposons que le processus de fusion se déroule en deux phases consécutives. Durant la première, la couche de glace se réchauffe jusqu'à atteindre la température $T_f = 0^\circ\text{C}$. Durant la seconde, la glace fond en surface, et on suppose que l'eau liquide produite est immédiatement évacuée.

Nous supposons que la couche de glace est, dans sa situation initiale, uniformément à la température $T_i < 0^\circ\text{C}$ et que la température dans la couche reste uniforme au cours de son évolution vers la température $T_f = 0^\circ\text{C}$. Par ailleurs, nous supposons que la couche de glace ne peut échanger de la chaleur qu'avec l'air. On rappelle que la relation (1) permet d'exprimer un flux à travers une interface solide-fluide ($\gamma = 40 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$).

85

- 15.** En présentant la démarche suivie, établir une expression des durées caractéristiques τ_1 et τ_2 des phases de réchauffement et de fusion de la glace. Estimer la valeur de chacune d'elles. Les comparer à la durée t_2 ($e_2 = 1$ m) de formation de la couche de glace obtenue en réponse à la question (12).
- 90 • Nous nous proposons de déterminer à quelle condition l'hypothèse de quasi-stationnarité introduite à la question (2), et sur laquelle repose l'étude conduite, demeure valide. Nous avons ainsi supposé que la diffusion thermique dans la couche de glace s'effectue de façon (quasi-)stationnaire. Dans ce cadre, la dépendance temporelle de la température n'apparaît que par l'intermédiaire des conditions aux limites (apparition de e , dépendant du temps).
- 95 **16.** Sur la base de l'équation aux dérivées partielles établie en réponse à la question (1), définir un temps caractéristique τ_{diff} représentatif du temps de diffusion de la température sur une épaisseur e de glace.
- 17.** Nous définissons le temps caractéristique τ_f de variation d'une fonction $f = f(t)$ par la relation suivante (en tout point où sa dérivée ne s'annule pas) :

$$\tau_f = \left(\frac{1}{f} \frac{df}{dt} \right)^{-1} \quad (4)$$

Établir, à partir de l'équation (3), que le temps caractéristique τ_e , associé aux variations de la fonction $e = e(t)$, s'exprime selon la relation suivante :

100

$$\tau_e = \frac{e(a + 2e)}{D^*} \quad (5)$$

- 18.** Définir, sur la base d'une brève argumentation, à quelle condition, portant sur les temps caractéristiques τ_{diff} et τ_e , l'hypothèse de quasi-stationnarité adoptée est vérifiée. Traduire cette condition sur la variable $Z = e/a$ et le rapport $q = D/D^*$.
- 19.** Discuter le résultat obtenu en réponse à la question (18).
- 105 **20.** Exprimer le rapport q en fonction de L_f , c et ΔT . Mettre en correspondance la conclusion de la réponse à la question (19) avec cette dépendance. Calculer la valeur de q .

2 Second problème : Étude d'un inlandsis.

Les calottes glaciaires (de taille inférieure à $50\,000 \text{ km}^2$) et les inlandsis (de taille supérieure à ce seuil) sont deux types de glaciers de forme très aplatie. Sur Terre, on les trouve notamment au sommet des volcans islandais (pour les premières) et au Groenland et en Antarctique (pour les seconds). L'objet de ce problème est d'étudier la dynamique de la glace dans ces objets afin de prédire leur forme et leur extension spatiale.

110

Dans toute cette étude, la glace est considérée comme un fluide incompressible dont le comportement rhéologique est newtonien (excepté à la question (29)). Nous notons ρ sa masse volumique et η sa viscosité dynamique.

115 **2.1 Préambule : Viscosité de la glace.**

La viscosité de la glace peut se mesurer en laboratoire, mais on peut en obtenir un ordre de grandeur en observant l'écoulement d'un glacier, comme celui de la Mer de glace dans le massif du Mont Blanc, par exemple.

120 Nous considérons un glacier situé sur une surface plane (O, x, y) qui forme un angle θ avec le plan horizontal. Il est soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{e}_{z_0}$ (qui définit la verticale).

La figure (2) représente une tranche élémentaire $[x, x + dx]$ de largeur W (selon (Oy)) et de hauteur H (selon (Oz)), de ce glacier. Ce dernier s'écoule le long de cette surface. Nous notons $\vec{v} = v(z) \vec{e}_x$ la vitesse d'un point $M(x, y, z)$ de ce glacier. Compte tenu des ordres de grandeur en jeu, cet écoulement s'effectue dans un régime de très faible nombre de REYNOLDS.

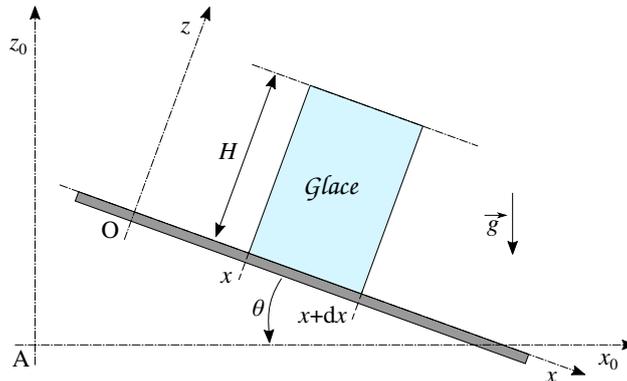


FIGURE 2 – Schématisation d'une tranche élémentaire $[x, x + dx]$ de glacier de largeur W , de hauteur H et de longueur dx .

- 125 **21.** Exprimer le poids $d\vec{P}$ de cette tranche élémentaire de glacier, puis ses composantes dP_x selon (Ox) et dP_z selon (Oz) .
- 22.** Représenter l'allure graphique de la fonction $v = v(z)$ (profil de vitesse).
- 23.** Exprimer la force de frottement visqueux élémentaire $d\vec{F}_v = dF_v \vec{e}_x$ qu'exerce le sol sur la base ($z = 0$) d'aire Wdx de la tranche de glace .
- 130 **24.** Nous notons $\vec{V} = V \vec{e}_x$ la vitesse moyenne (sur la section $W \times H$ du glacier) de la tranche de glacier et adoptons cette grandeur comme vitesse caractéristique. Déduire de l'expression de dF_v la force caractéristique élémentaire dF_v^* que l'on peut lui associer. On l'exprimera en fonction de l'aire Wdx , η , H et V .

Dans la suite, c'est la force dF_v^* que nous ferons intervenir.

- 135 **25.** Nous considérons que l'écoulement du glacier s'effectue à vitesse constante (régime stationnaire). Par ailleurs, nous considérons que les forces de pression agissant sur la tranche, de la part des parties amont et aval du glacier sont de somme nulle. Établir alors la relation liant dP_x à dF_v^* . Déduire de cette relation une expression de la viscosité dynamique η de la glace en fonction des paramètres ρ , g , H , θ et de la vitesse de l'écoulement glaciaire V .

140 Cette relation permet, à partir de mesures assez simples, d'accéder à une estimation de l'ordre de grandeur de la valeur de η .

- La figure (3) représente la topographie d'un tronçon de la Mer de glace. La différence d'altitude entre deux lignes de niveau (ou lignes iso-altitudes) consécutives est égale à 10 m.

- 145 **26.** À partir des lignes de niveau de la carte topographique représentée sur la figure (3), estimer la valeur de l'angle d'inclinaison de la surface du glacier. On supposera que cet angle d'inclinaison est identique à celui du socle rocheux (θ) sous le glacier (ce qui revient à supposer que l'épaisseur de glace est uniforme).

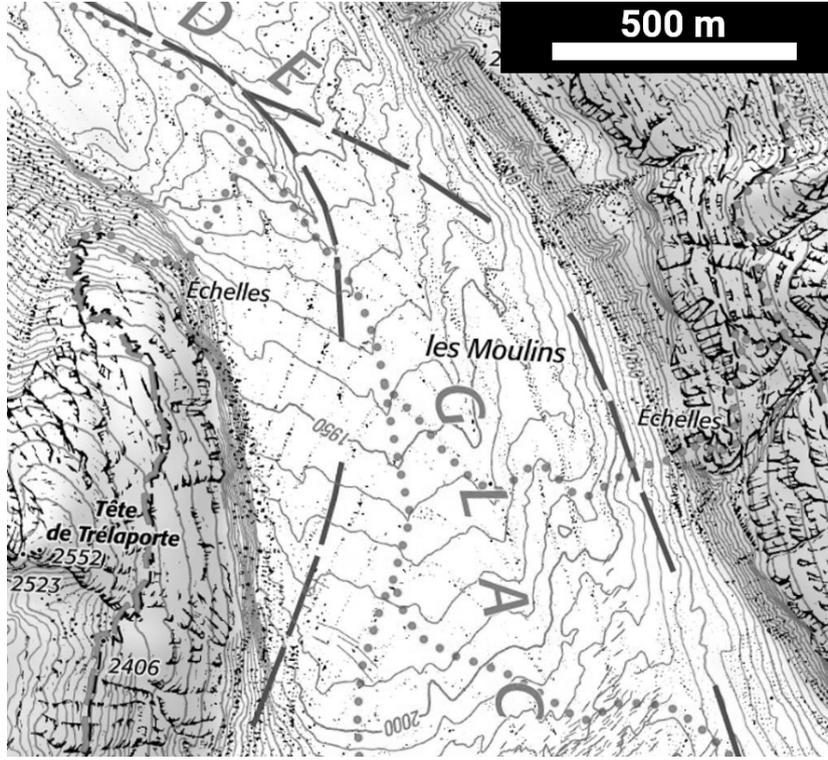


FIGURE 3 – Carte topographique d’un tronçon de la Mer de glace. Les lignes de niveau sont tracées selon un incrément d’altitude de 10 m. Source : Extrait d’une carte IGN.

- 150
27. La hauteur H de la Mer de glace, sur la zone représentée sur la topographie (figure (3)), est estimée à 100 m et sa vitesse V de surface à $100 \text{ m}\cdot\text{an}^{-1}$ (que l’on assimilera à la vitesse caractéristique introduite dans la question (24)). En déduire une estimation de l’ordre de grandeur de la valeur de la viscosité dynamique η de la glace. La comparer à celle de l’eau.
28. Définir le nombre de REYNOLDS Re , de façon générale. Donner son expression dans le cas particulier qui nous intéresse. Calculer sa valeur puis commenter ce résultat.
- 155 29. Les mesures en laboratoire révèlent que la glace se comporte, en réalité, comme un fluide non-newtonien. La force de cisaillement visqueux élémentaire $d\vec{F}_v$, qu’exerce une couche de glace sur une portion d’aire $dS = W \times dx$ de la couche inférieure, prend la forme suivante :

$$d\vec{F}_v = K \times \dot{\gamma}^{1/3} \times dS \vec{e}_x \quad \text{où} \quad K = \text{Cste} > 0 \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (\text{loi de Glen}) \quad (6)$$

En adoptant comme référence la loi de comportement d’un fluide newtonien, proposer une définition d’une viscosité effective η_{eff} de la glace. Indiquer comment cette viscosité effective varie alors avec $\dot{\gamma}$, appelé taux de cisaillement.

160 **2.2 Dynamique de l’inlandsis.**

Nous étudions à présent un glacier de type “inlandsis” à symétrie cylindrique. Vu du dessus, l’inlandsis apparaît comme un disque de rayon R . Nous notons $h = h(r)$ son épaisseur à la distance r de son axe (Oz). La glace est à nouveau considérée comme un fluide newtonien. Ce glacier est représenté sur la figure (4).

Nous adoptons les conditions aux limites suivantes : $h(r = 0) = H$ et $h(r = R) = 0$.

- 165 La couche de glace étant très aplatie, nous considérons que la vitesse de chacun des point de la calotte admet uniquement une composante radiale. Nous l’exprimons sous la forme suivante :

$$\vec{v} = v(r, z) \vec{e}_r \quad \text{où} \quad v(r, z) = A(r) \times z^2 + B(r) \times z + C \quad (C = \text{Cste} ; 0 \leq r \leq R ; 0 \leq z \leq h(r)) \quad (7)$$

Le vecteur \vec{e}_r est unitaire et radial, au point $M(r, z)$ considéré de la calotte glacière.

Nous notons $\vec{V} = V(r) \vec{e}_r = v(r, z = h(r)) \vec{e}_r$, la vitesse au point $M(r, h(r))$ de la surface de la calotte.

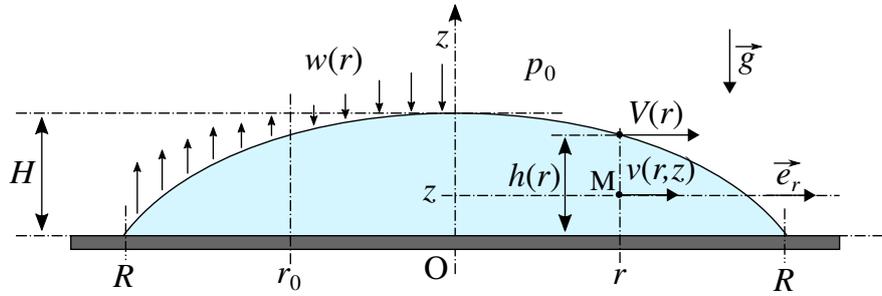


FIGURE 4 – Calotte glaciaire vue en coupe selon un plan vertical contenant son axe (Oz). Sa géométrie est de symétrie cylindrique, autour de cet axe.

- 170
30. Préciser la condition limite que doit vérifier la vitesse en $z = 0$. En déduire la valeur de la constante C .
31. La viscosité de l'air étant très faible devant celle de la glace, nous considérons que la surface de la calotte ($z = h(r)$) n'est soumise à aucune force visqueuse (ou force visqueuse par unité de surface). En déduire une relation entre $A(r)$, $B(r)$ et $h(r)$.
- 175 32. Exprimer $v(r, z)$ en fonction de $V(r)$, $h(r)$ et z . Représenter l'allure graphique de la dépendance de $v(r, z)$ vis-à-vis de z , à r fixé.
33. Nous supposons que la pression $p(r, z)$, dans la glace, vérifie la relation fondamentale de l'hydrostatique. Établir alors son expression. Nous notons p_0 la pression atmosphérique et g l'accélération de la pesanteur.
- 180 34. Nous admettons que la vitesse v et la pression p vérifient conjointement l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (8)$$

Indiquer quel est le principe physique traduit par cette équation.

35. Déduire des résultats précédemment établis que la vitesse V s'exprime selon la relation suivante :

$$V(r) = -G h^2 \frac{dh}{dr} \quad \text{où} \quad h = h(r) \quad (9)$$

G est une constante positive que l'on exprimera en fonction des paramètres ρ , η et g .

2.3 Forme et extension du glacier.

- 185 36. Établir que le débit volumique $Q(r)$ [$L^3 T^{-1}$] de glace à travers le cylindre de rayon r et de hauteur $h(r)$ s'exprime selon la relation suivante :

$$Q(r) = \frac{4\pi}{3} V(r) \times h(r) \times r \quad (10)$$

- 190 • En pratique, la calotte est un système ouvert : de la neige peut tomber (et se compacter en glace), ou de la glace peut fondre. Nous notons $w(r)$ le volume de glace gagné (algébriquement) par unité de temps et de surface, à la distance r de l'axe (Oz) (w a donc la dimension d'une vitesse). Si $w > 0$, il neige ; si $w < 0$ la glace fond.

Nous considérons le domaine élémentaire $d\mathcal{D}$ définissant le volume présentant la géométrie d'une bague de hauteur $h(r)$, de rayons intérieur r et extérieur $r + dr$.

37. Exprimer, en fonction de Q , le volume élémentaire de glace dV_e qui entre dans ce domaine, pendant un temps dt , puis le volume dV_s qui en sort.

- 195 **38.** Nous nous plaçons dès à présent en régime stationnaire. À partir d'un bilan de volume (ou de masse, au choix) de glace sur le domaine $d\mathcal{D}$, établir l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dr} \left(r h^3(r) \frac{dh}{dr} \right) = -\frac{3\eta}{\rho g} \times r w(r) \quad (11)$$

- Nous supposons qu'en deçà d'une distance r_0 ($r_0 > 0$) à l'axe (Oz) il neige et qu'au-delà la glace fond. Nous modélisons cette situation en écrivant le gain (algébrique) de glace sous la forme suivante :

$$w(r) = w_0 \times \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \quad (w_0 > 0) \quad (12)$$

La forme de cette dépendance est illustrée sur la partie gauche de la figure (4).

- 200 **39.** Intégrer l'équation (11). Établir que la dépendance de l'épaisseur de la calotte glaciaire vis-à-vis de r est donnée par l'équation suivante :

$$h^4(r) = H^4 + \frac{\eta w_0}{\rho g} \times (\alpha r^3 + \beta r^2) \quad (13)$$

où α et β sont des constantes à déterminer.

- 40.** Exprimer la hauteur H de la calotte en fonction de son rayon R .

- 205 **41.** Pour être réaliste, le modèle adopté doit satisfaire certaines contraintes (par exemple $H > h > 0$) qui lient H , w_0 , r_0 et les autres paramètres. Nous adoptons les valeurs compatibles suivantes : $\eta = 3 \times 10^{12}$ Pa·s, $r_0 = 500$ km, $w_0 = 10$ m·an⁻¹ et $H = 2,3$ km.

La figure (5) représente graphiquement la fonction $F_W : W \rightarrow 9W^2 - 4W^3$. Déterminer, à l'aide de ce graphe, la valeur du rayon R de la calotte glaciaire. On justifiera que l'on doit avoir $R > r_0$ (sous l'hypothèse de stationnarité adoptée).

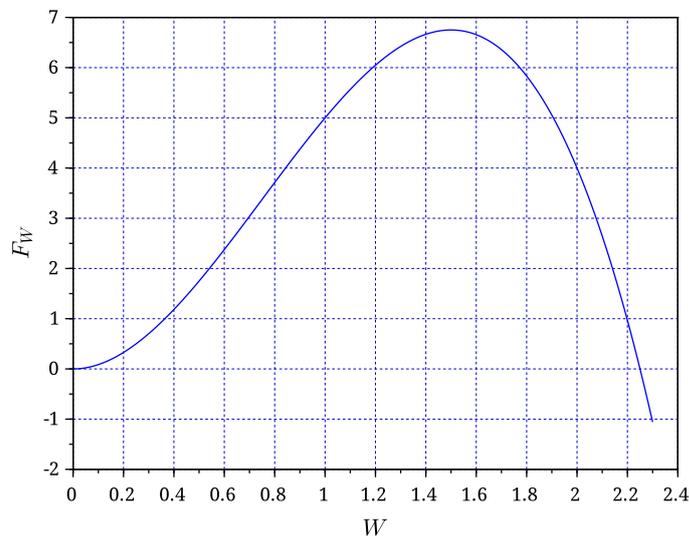


FIGURE 5 – Représentation graphique de la fonction $F_W = F_W(W)$.

- 210 **42.** L'hypothèse ayant conduit à l'équation (7) décrivant un écoulement purement horizontal paraît-elle justifiée ?

2.4 Rebond post-glaciaire.

Nous modélisons à présent la calotte de glace par un volume parallélépipédique, de hauteur H , de longueur $2L$ (dans la direction (Ox)) et de largeur B (dans la direction (Oy)). Le poids de la glace déforme la lithosphère sous-jacente, qui s'enfonce dans l'asthénosphère. La variable s désigne la profondeur de cet enfoncement. La figure (6) schématise ce phénomène.

Nous notons ρ la masse volumique de la glace. La lithosphère possède la masse volumique ρ_ℓ et l'épaisseur e . Sous l'action du poids de la glace, elle se déforme de manière élastique. Nous modélisons son comportement par deux ressorts reliant le segment déformé au reste de la plaque. Nous notons K la raideur de chacun de ces ressorts. Leur longueur à vide est nulle. L'asthénosphère est un fluide visqueux, newtonien, incompressible, de masse volumique ρ_a et de viscosité dynamique η_a .

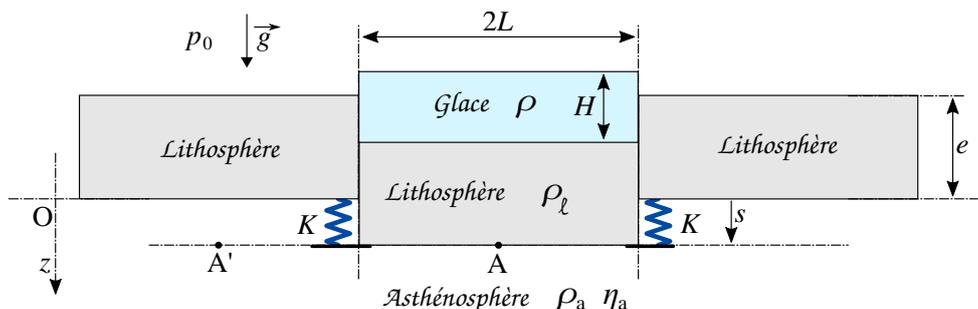


FIGURE 6 – Modélisation adoptée de la déformation élastique lithosphérique sous l'action du poids de la glace.

• Nous adoptons les valeurs suivantes :

- $H = 3 \text{ km}$; $2L = 10^3 \text{ km}$; $e = 100 \text{ km}$
- $\rho_\ell = 2,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\rho_a = 3 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $K/B = 35 \text{ GPa}$

2.4.1 Équilibre isostatique.

Nous considérons que la pression dans l'asthénosphère suit la relation fondamentale de l'hydrostatique.

43. Exprimer la force \vec{F}_g exercée sur la surface supérieure du secteur de lithosphère central par la calotte de glace. On n'omettra pas la contribution de la pression atmosphérique p_0 (en toute rigueur).
44. Exprimer la résultante des forces de pression \vec{F}_a exercée sur la surface inférieure du secteur de lithosphère central par l'asthénosphère. On adoptera la pression $p(O)$ au point O comme pression de référence dans l'asthénosphère.
45. Exprimer la force élastique \vec{F}_K exercée sur le secteur de lithosphère central par ses deux voisins.
46. Traduire l'équilibre mécanique du segment de lithosphère central. En déduire l'expression de son enfoncement s_0 dans l'asthénosphère, à l'équilibre. Nous poserons $K_{\text{eff}} = 2(K + \rho_a g L B)$.

2.4.2 Dynamique du rebond post-glaciaire.

Depuis la situation d'équilibre précédemment caractérisée (pour laquelle $s = s_0$), nous supposons qu'à l'instant $t = 0$, la calotte de glace disparaît "instantanément". Le segment de lithosphère se trouve alors en déséquilibre et tend à rejoindre sa situation d'équilibre sans charge ($s = 0$). Le mouvement de surrection qui en résulte s'appelle le "rebond post-glaciaire". Ce déplacement vertical est couplé à un écoulement horizontal de l'asthénosphère qui s'accompagne d'effets visqueux.

245 Nous modélisons cette situation par le système mécanique {masse, ressort, amortisseur} représenté sur la figure (7). La masse est celle du secteur central de lithosphère (se reporter à la figure (6)), nous la notons M . Le ressort a pour raideur K_{eff} (définie dans la question (46)). L'amortisseur exerce une force sur le secteur central de lithosphère que nous écrivons sous la forme suivante :

$$F_v = -\lambda \times \dot{s} \quad \text{où} \quad \lambda = 2\eta_a B \quad \text{et} \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt} \quad (14)$$

Il s'agit d'une grandeur algébrique, rapportée à l'axe (Oz).

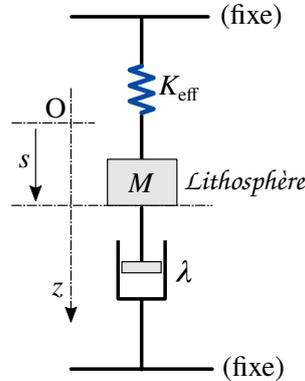


FIGURE 7 – Modélisation du couplage mécanique du secteur central de lithosphère (masse M), d'une part élastiquement avec les secteurs voisins (raideur K_{eff}), d'autre part par effets visqueux avec l'asthénosphère (amortisseur λ).

47. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse M du secteur de lithosphère. En déduire l'équation différentielle (notée ED(s)) vérifiée par la variable s . Représenter les allures, *a priori* envisageables, de l'évolution temporelle $s = s(t)$.

250 On notera que s est maintenant l'écart par rapport à la nouvelle position d'équilibre (charge glaciaire ôtée). Le poids n'est donc plus à prendre en compte.

48. Nous notons τ_r le temps caractéristique d'évolution du secteur central de lithosphère vers sa nouvelle situation d'équilibre ($s = 0$). En raisonnant sur des grandeurs caractéristiques, indiquer à quelle condition, portant sur τ_r , M et λ , le terme faisant intervenir l'accélération \ddot{s} dans l'équation différentielle ED(s) peut être négligé devant celui faisant intervenir la vitesse \dot{s} .

Indiquer à quel régime d'évolution, "inertiel" ou "visqueux", cette situation correspond.

Nous supposons que la dynamique de la lithosphère se situe dans ce régime et nous nous plaçons désormais sous cette hypothèse.

49. Exprimer le temps caractéristique τ_r en fonction de λ et de K_{eff} , puis en fonction de η_a , ρ_a , g , L , B et K . Représenter l'allure graphique de la fonction $s = s(t)$. On fera apparaître, sur ce tracé, s_0 et τ_r .

50. Proposer un circuit électrique équivalent au système mécanique représenté sur la figure (7) (dans le cas où $M = 0$). On précisera les correspondances établies entre K_{eff} , λ , s , \dot{s} et leurs analogues électriques.

51. Pour une calotte glaciaire de rayon $L = 500$ km et de hauteur $H = 3$ km (par exemple celle qui recouvrait la Scandinavie pendant le dernier maximum glaciaire), la valeur de la constante de temps τ_r du rebond post-glaciaire est estimée à 1 000 ans. Estimer la valeur de la viscosité dynamique de l'asthénosphère. La comparer à la valeur de la viscosité dynamique η de la glace obtenue en réponse à la question (27).

*** FIN DE L'ÉPREUVE ***