ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2024

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

Exercice

Une fonction définie par une intégrale.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie, paire et continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f(0)$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$x \mapsto f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/n}\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t/n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n''(x) - f_n(x) = -\frac{n}{1+n^2x^2}.$$
5. En déduire que la suite de fonctions (f_n'') converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
6. (a) Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-t/n}\sin(tx)$.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que la suite de fonctions (f_n') converge simplement sur $]0, +\infty[$.
7. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f''(x) - f(x) = 0.$$
8. En déduire l'expression de f sur $]0, +\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Une interprétation combinatoire des moments de la loi de Poisson de paramètre 1.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris au sens large entre 1 et n.
Si E est un ensemble fini et si $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E, on rappelle qu'une partition de E est la donnée d'un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et de $\{A_1, \ldots, A_k\} \subset \mathcal{P}(E)$ vérifiant :

- $\forall i \in [\![1, k]\!],\ A_i \neq \emptyset$,
- $\forall i, j \in [\![1, k]\!],\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $E = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$.

Par exemple, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$ est une partition de $E = \{a, b, c\}$.

Dans tout l'exercice, pour $n \in \mathbb{N}$, on note α_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ (avec la convention $\alpha_0 = 1$).

1. Calculer α_1, α_2 et α_3.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k.$$

3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \leqslant n!.$$
4. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{\alpha_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Pour $|x| < 1$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$.

5. Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = e^x f(x).$$
En déduire la valeur de $f(x)$.
6. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$,
$$\alpha_n = \mathbb{E}(X^n)$$
où X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1.

Exercice 3

Autour des matrices de Gram.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel $\geqslant 2$. Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont assimilés à des vecteurs colonnes.
Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on note $X^T = (x_1, \ldots, x_n)$ le vecteur ligne correspondant.
On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n, $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives réelles de taille n et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives réelles de taille n.

Partie I. Généralités sur les matrices de Gram.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace pré-hilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
Si $k \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel et si $(v_1, \ldots, v_k)$ est une famille de vecteurs de E, on note
$$G(v_1, \ldots, v_k) = \big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in M_k(\mathbb{R}).$$

1. Montrer sans calculs que $G(v_1, \ldots, v_k)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour $X \in \mathbb{R}^k$, trouver une expression simple du réel $X^T G(v_1, \ldots, v_k) X$.
   (b) En déduire que $G(v_1, \ldots, v_k) \in S_k^+(\mathbb{R})$ et que
   $$G(v_1, \ldots, v_k) \in S_k^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_k) \text{ est libre.}$$
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M(a,b) = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par
   $$m_{i,j} = a \text{ si } i = j \text{ et } m_{i,j} = b \text{ si } i \neq j.$$
   Déterminer les valeurs propres de $M(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités.
4. *Une première application.* On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On suppose qu'il existe une famille $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que :
   $$\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ \|v_i\| = 1 \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j\rangle = \alpha.$$
   (a) Montrer que $|\alpha| \leqslant 1$.
   (b) Montrer que
   $$G(v_1, \ldots, v_{n+1}) \notin \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}).$$
   (c) En déduire qu'il existe au plus une valeur de α possible et la déterminer.

(d) Déterminer une telle famille (v_1, v_2, v_3) pour $n = 2$.

(e) A l'aide d'une construction par récurrence, montrer qu'une telle famille $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ existe pour tout $n \geqslant 2$.

Partie II. Une application géométrique.

On suppose **dans toute cette partie** que n est un entier $\geqslant 2$ non congru à 6 modulo 8 et que $\mathbb{R}^n$ est muni de la structure euclidienne canonique.

L'objectif de cette partie est de montrer qu'il n'existe pas de collection de $n+2$ points distincts dans $\mathbb{R}^n$ dont les distances deux à deux sont toutes des entiers impairs.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ des points de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $i \neq j$, $\|\overrightarrow{A_iA_j}\| \in \mathbb{N}$. On note

$$v_1 = \overrightarrow{A_1A_2},\ v_2 = \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots, v_{n+1} = \overrightarrow{A_1A_{n+2}}$$

et

$$G = \big(2\langle v_i, v_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = 2\,G(v_1, \ldots, v_{n+1}) \in M_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que
$$\forall i, j \in [\![1, n+1]\!],\ 2\langle v_i, v_j\rangle \in \mathbb{Z}.$$
Indication : on pourra calculer $\|\overrightarrow{A_iA_j}\|^2$.

2. On suppose dorénavant que pour tout $i \neq j$, $\|\overrightarrow{A_iA_j}\| \in 2\mathbb{N}+1$.
   (a) Montrer que la matrice G est congrue modulo 8 à la matrice $M(2,1)$ définie à la question (3) de la partie I.
   (b) En déduire que G est inversible et aboutir à une contradiction.

3. Montrer en revanche que pour tout n, il existe une collection de $n+1$ points distincts dans $\mathbb{R}^n$ dont les distances deux à deux sont toutes des entiers impairs.