Banque BCPST Inter-ENS / ENPC / Mines de Paris - Session 2024

Rapport relatif à l'épreuve écrite de mathématiques

Épreuve comptant uniquement pour l'admission

- **Ecoles partageant cette épreuve : ENS (Paris) - ENS de Lyon - ENS de Paris-Saclay - ENPC - Mines de Paris**
- **Coefficients** (en pourcentage du total d'admission de chaque concours) :
  – ENS PARIS-SACLAY : 6,2%
  – ENS DE LYON :
  * Option Bio : 6,6 %
  * Option ST : 6,6 %
  – ENS (Paris) :
  * Option Bio : 13,7 %
  * Option ST : 13,7 %
  – ENPC/MINES : 17,5 %
- **Membre du jury : Grégoire Nadin**

Le sujet étudiait un modèle de dynamique adaptative. La première partie étudiait le modèle de Lotka-Volterra compétitif entre deux populations sans mutation via des méthodes d'équations différentielles. Un terme de mutation était introduit dans la deuxième partie, qui étudiait d'abord le modèle linéarisé via une approche matricielle, puis le modèle nonlinéaire en admettant la convergence des solutions en temps grand. La troisième partie concernait le signe des racines d'un polynôme de degré 3. La dernière partie étudiant le modèle linéaire avec mutation pour trois populations.

Le sujet mobilisait donc des connaissances en particulier en équations différentielles, en analyse matricielle et en analyse polynomiale, quelques questions concernaient également le calcul différentiel ou l'analyse de limites.

Les notes obtenues par les candidats admissibles sont comprises entre 1,9 et 19,3. La moyenne est de 10,78, l'écart-type de 3,46. En répondant aux questions relevant d'une application immédiate du cours de classes préparatoires, les candidats pouvaient atteindre 9. Pour aller au-delà il fallait savoir appliquer le cours dans des situations moins évidentes. Il est notable que la plupart des candidats ont bien intégré le programme de lycée et sont à l'aise avec les calculs simples, ce qui n'était pas le cas il y a deux ans. Il s'agit sans doute de la conséquence d'une place plus importante laissée aux mathématiques dans l'orientation des futurs candidats au lycée.

Le sujet contenait plusieurs erreurs. La plupart n'ont pas perturbé les candidats. Par exemple, dans la question 12), il fallait lire "a_0, a_1 et a_2" au lieu de "a_1, a_2 et a_3", mais cela a été bien compris par les candidats, qui ont souvent abordé cette question (pas toujours avec succès). L'erreur la plus problématique était la mauvaise définition des fonctions U et V à la question 6) : il aurait fallu écrire "$U(t) := e^{\int_0^t \rho(s)ds - \lambda_1 t} u(t)$" et "$V(t) := e^{\int_0^t \rho(s)ds - \lambda_1 t} v(t)$". La plupart des candidats ayant traité la question 6.a) ont ainsi relevé qu'il aurait fallu supposer $\lambda_1 = 0$ pour résoudre cette question. Il fallait ensuite arriver à la question 7.e) pour être de nouveau confronté à ce problème. Mais la plupart des candidats ont abandonné cette partie avant (seuls 21 candidats ont abordé la question 7.d), souvent en en admettant la première partie pour grappiller des points). Ces erreurs n'ont donc pas empêché les candidats de progresser dans le sujet et n'ont donc pas biaisé la notation.

Voici quelques commentaires aux réponses apportées par les candidats.

1.a), b) et c) Ces questions ont été bien traitées par la quasi-totalité des candidats. Il aurait fallu préciser dans le sujet que la solution u restait positive en tout temps mais cela n'a pas troublé les candidats.

2.a) Cette question pouvait se traiter en intégrant l'équation (2) divisée par u, respectivement v, ou bien en dérivant U (ce qui revenait à utiliser l'indication de la question suivante).

2.b) La première partie de cette question servait avant tout d'indication pour traiter la deuxième partie.

2.c) et d) Ces questions ont été bien traitées par la plupart des candidats.

3.a) et b) Il fallait uniquement invoquer le théorème spectral. La plupart des candidats ont perdu du temps en tentant de calculer les valeurs propres, ce qui n'était pas demandé.

3.c) Attention ça n'est pas parce les coefficients d'une matrice A sont plus petits que ceux d'une matrice B qu'on obtient des inégalités sur AX et BX pour tout vecteur colonne X.

4) Question bien traitée par les candidats qui l'ont abordée.

5.a) Question en général bien traitée.

5.b) Il fallait utiliser que $A\hat{X} = \lambda_1 \hat{X}$ pour pouvoir conclure, ce que de nombreux candidats ont oublié.

6.a) Telle qu'énoncée, cette question ne pouvait pas être résolue. Il fallait ajouter un terme en $\lambda_1 U$ (respectivement $\lambda_1 V$) pour conclure. La plupart des candidats ayant abordé cette question l'ont remarqué.

6.b) Il suffisait de multiplier numérateur et dénominateur par $e^{\int_0^t \rho}$. Plusieurs candidats ont affirmé la convergence sans rien prouver.

7.a) Question en général bien traitée quand elle était abordée.

7.b) La première partie de la question relevait de la définition (théorique) de la limite et a souvent été traitée. La deuxième partie nécessitait d'intégrer ρ'/ρ.

7.c) La plupart des candidats ont décroché à partir de cette question, et ont repris à la question 8). La bonne définition du minimum (ensemble non vide et minoré) a souvent été mal traitée. Il fallait ensuite établir que $\rho'(t_3) \leqslant 0$ du fait de la définition du minimum. La dernière partie de la question a en conséquence était très peu traitée. Il y avait une erreur : il fallait lire $\rho(t) \geqslant \lambda_1 - \epsilon$ pour tout $t \geqslant t_1$ (et non t_0).

7.d) et 7.e) Comme dit plus haut, ces questions ont été très peu traitées.

8) On pouvait soit utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, soit utiliser le fait que si une racine est complexe, son conjugué est également racine.

9) Il fallait mentionner le théorème de Rolle.

10) Il suffisait de résoudre l'équation du second degré $Q'(z) = 0$.

11) Il fallait identifier la relation entre les coefficients a_0, a_1 et a_2 et les racines z_1, z_2 et z_3. Cette question relativement calculatoire a étonnamment été bien traitée par de nombreux candidats.

12) De nombreux candidats se sont perdus en cherchant à utiliser la relations entre racines et coefficients trouvée à la question précédente. Cette méthode a pu parfois aboutir en utilisant les relations sur les racines de Q'. Mais le plus simple était de remarquer que si les coefficients sont strictement positifs, alors $Q(z) > 0$ pour tout $z \geqslant 0$.

13) Comme à la question 3), il fallait invoquer le théorème spectral. Mais de nombreux candidats se sont perdus en tentant de calculer les valeurs propres.

14) Il fallait montrer que $Y' = DY$, ce qui a été en général bien fait par les candidats traitant cette question.

15) Il fallait ici utiliser que $X = P^{-1}Y$. Cette question a en général été mal traitée, les candidats ne justifiant pas que la convergence de $Y(t)$ vers 0 implique celle de $X(t)$, voir écrivant des horreurs comme "une matrice non-nulle est inversible".

16) Question relativement calculatoire. Il fallait distinguer les cas. De nombreux candidats en ont oublié.

17) Question calculatoire, mais malgré tout bien traitée par 46 candidats.

18) Question très calculatoire, seulement bien traitée par une poignée de candidats. Il fallait a minima identifier où intervenait la condition $r_1 + r_2 + r_3 < 0$ pour engranger des points.