Rapport de l'épreuve d'Oral de Mathématiques

MINES PARIS | PSL

École des Ponts ParisTech

- Banque BCPST INTER-ENS — Session 2024
- Écoles concernées : Mines de Paris / ENPC
- Coefficient en pourcentage du total d'admission : 17,5%
- Jury : Jonathan HARTER & Mathieu REMY

1. PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE

L'épreuve d'Oral de Mathématiques commun aux Mines de Paris et à l'École des Ponts (concours BCPST) dure 50 minutes et est précédée de 15 minutes de préparation. Elle se déroule dans les locaux de l'ENPC.

Elle consiste en deux exercices permettant de balayer une vaste partie du programme de Mathématiques des deux années de classe préparatoire. Elle ne comporte pas d'Informatique. L'objectif de cet oral est de sélectionner des candidates et candidats capables de suivre un cursus exigeant en Mathématiques.

Quelle qu'ait été la préparation du candidat, les deux exercices seront abordés pendant l'oral, permettant ainsi au jury d'évaluer aussi le candidat sur sa réactivité face à des questions nouvelles auxquelles il n'aura pas eu le temps de réfléchir pendant les 15 minutes de préparation.

On attend du candidat qu'il sache traiter d'emblée des questions classiques et faisant appel aux méthodes du cours. En revanche il est légitime sur des questions plus difficiles qu'il soit amené à réfléchir et à proposer des pistes qui n'aboutiront pas, du moment qu'elles sont cohérentes et justifiées par rapport à l'exercice, et démontrent à la fois une bonne connaissance du cours et un esprit d'initiative. Le jury rappelle que son rôle est d'évaluer afin de classer, ce qui l'amène à interroger les candidats. Cet oral n'est pas un « écrit au tableau » mais bien un dialogue pertinent sur les Mathématiques.

2. REMARQUES DU JURY

Commençons par une remarque préliminaire : de façon générale, toute notion utilisée n'étant pas au programme de BCPST peut faire l'objet d'une question de cours et d'une demande d'éclaircissement. Citons quelques exemples classiques :

- le critère de RIEMANN pour les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \notin \{1,2\}$) ou les intégrales $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$: il est attendu que les candidats sachent expliquer la convergence ou divergence de l'objet pour la puissance considérée.
- Le critère sur les petits o pour la nature de séries et d'intégrales : il est ici attendu que les candidats sachent transformer la relation en inégalité locale.
- L'inégalité des accroissements finis, ou encore l'utilisation de la trace pour le calcul des valeurs propres.

2.1. Algèbre

Le cours sur la diagonalisation est globalement su et maîtrisé, mais nous notons toutefois des confusions entre différentes définitions (caractère inversible et diagonalisable d'une matrice par exemple). Plus généralement nous notons peu d'aisance sur les calculs et raisonnements d'algèbre linéaire une fois sorti des résolutions de petits systèmes linéaires : certains résultats plus abstraits (théorème du rang, critère inversibilité et spectre d'une matrice triangulaire, arguments de dimension, ...) peuvent éviter des calculs trop longs ou pénibles. Les calculs sur des vecteurs non explicites (par exemple si $AX = \lambda X$ alors $A^2X = \lambda^2 X$) sont également souvent compliqués pour les candidats.

2.2. Analyse

Les candidats sont toujours peu à l'aise avec l'utilisation des valeurs absolues, et, de manière générale, les majorations de grandeurs. Ce qui est pourtant une démarche essentielle en analyse afin d'étudier des sommes, des intégrales *etc.*.

Encore cette année, nous notons des maladresses dans l'application du critère de comparaison pour les séries et les intégrales impropres ; nous rappelons que ces critères s'appliquent directement sur les termes généraux (pour les séries) ou directement sur les intégrandes. Commencer un oral en majorant une fonction non positive, puis en intégrant l'inégalité entre $-\infty$ et $+\infty$ ne mettra pas l'examinateur en confiance pour la suite. Le même commentaire vaut pour les séries.

Le calcul intégral, notamment l'intégration par parties et le changement de variable, y compris pour les intégrales généralisées, est plutôt bien maitrisé chez les candidats interrogés mais une justification spontanée est attendue (au moins oralement) : elle est encore bien souvent oubliée, et nous perdons du temps à la demander si ce n'est pas le cas.

2.3. Probabilités

Nous notons cette année des progrès sur les probabilités discrètes, qui sont mieux traitées, et les expériences globalement mieux comprises. Les candidats sont plutôt efficaces dans les calculs propres aux lois à densité, y compris lorsque que ceux-ci sont compliqués.

2.4. Forme & Présentation

Nous conseillons aux candidats d'éviter de cacher systématiquement le tableau au jury pendant ses calculs, en lui tournant le dos. Il est aussi attendu que les candidats sachent gérer leur tableau de manière autonome.

Banque ÉNS – ENPC/Mines de Paris ©

2.5. Conclusion

De manière générale, les étudiants sont bien préparés, ont une attitude volontaire pour avancer et tiennent compte des indications données. Même si l'épreuve écrite de Mathématiques ne compte pas pour l'admissibilité, le niveau global est bon, et tous les candidats réussissent globalement à traiter une partie conséquente des exercices posés.

3. EXEMPLES DE SUJETS

3.1. Exemple 1

Exercice 1 | [Solution] Soit $x \in \mathbb{R}$. En cas d'existence, on note : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx)\,dt$.

1. Résoudre l'équation différentielle : (E) $y' = -xy$.
2. Justifier, en utilisant une loi à densité, que $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ converge et déterminer sa valeur.
3. Montrer que $f(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f(0)$.
4. On souhaite à présent montrer que f peut se « dériver sous l'intégrale », c'est-à-dire que f est dérivable avec : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx)\,dt$.

   4.1) Montrer que :
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(b) = \cos(a) - (b-a)\sin(a) - \int_a^b (b-t)\cos t\,dt.$$
   En déduire que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |\cos(b) - \cos(a) + (b-a)\sin(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}$.

   4.2) Conclure.
5. Montrer que f est solution de (E), puis exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 2 | [Solution] On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,E)$. On suppose que $n > p$.

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.
2. Montrer que 0 est nécessairement valeur propre de $g \circ f$.
3. **[Application]** On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Déterminer les valeurs propres de $B \times A$ et en déduire celles de $A \times B$. La matrice $A \times B$ est-elle diagonalisable ?

3.2. Exemple 2

Exercice 3 | Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note X_n une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{-t/n} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de X_n ? Donner son espérance et sa variance.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < 1)$.

   2.1) Montrer que $u_n = (e^{2/n} - 1)e^{-(n+1)/n}$.

   2.2) En déduire un équivalent simple et la limite de (u_n).
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on considère l'évènement $A_k = \left[k + \frac{1}{2} < X_n < k+1\right]$.

   3.1) Exprimer l'évènement $B_n = \left[X_n - \lfloor X_n \rfloor > \frac{1}{2}\right]$ en fonction des évènements A_k.

   3.2) Calculer $v_n = \mathbb{P}(B_n)$ ainsi que $\lim\limits_{n \to \infty} v_n$.
4. On suppose désormais les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$M_n = \min(X_1, \dots, X_n).$$
   4.1) Déterminer la loi de M_n.

   4.2) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad w_n = \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < 1)$, puis $\lim\limits_{n \to \infty} w_n$.

Exercice 4 | On considère F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f : x \longmapsto P(x)e^{-x}$ pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On note, pour $k \in [\![0,3]\!]$, f_k la fonction $f_k : x \longmapsto x^k e^{-x}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que $\mathscr{C} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ en est une base.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to F$ l'application définie par :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) : x \longmapsto e^{-x}(P(x) - xP'(x+1)).$$
   2.1) Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans F.

   2.2) On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Donner la matrice de φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

   2.3) L'application φ est elle un isomorphisme ? Est-elle diagonalisable ?
3. On note $E' = \mathrm{Vect}(1_{\mathbb{R}_3[X]}, X^2, X^3)$ un sous-espace vectoriel de E et $F' = \mathrm{Im}(\varphi)$ un sous-espace vectoriel de F. Montrer que : $\psi \left| \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F' \\ P & \longmapsto & \varphi(P) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}_3[X]$ l'équation d'inconnue P suivante, où α est un paramètre réel :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = e^{-x}(1 + \alpha x + x^2).$$