ECOLE POLYTECHNIQUE — CONCOURS D'ADMISSION 2024
ENS : LYON, PARIS-SACLAY, RENNES

Composition de Mathématiques A, Filières MP et MPI (XLSR)

1. Présentation du sujet

Cette année, le sujet était composé de deux parties complètement indépendantes, mais dont l'objectif était similaire : la démonstration d'une estimée asymptotique.

Plus précisément, la première partie proposait l'étude de certaines variables aléatoires définies sur l'ensemble des permutations $\mathfrak{S}_n$, probabilisé pour l'occasion. Ces variables aléatoires consistaient en la signature, le nombre de points fixes, ou encore le nombre de cycles de la décomposition en cycles à supports disjoints. Le point d'orgue était alors la démonstration d'une faible déviation de ce nombre de cycles du terme asymptotique principal de son espérance, à savoir $\ln n$. Les questions demandaient de savoir combiner des outils classiques d'algèbre linéaire (diagonalisation, matrice de changement de base), de combinatoire (dénombrement, formule du binôme de Newton), ou encore des propriétés élémentaires des polynômes, mais aussi d'avoir une bonne maîtrise des différentes comparaisons asymptotiques.

La seconde partie quant à elle avait pour but d'étudier le comportement asymptotique du cardinal $\omega(n)$ de l'ensemble des nombres premiers divisant un entier n, et utilisait pour cela certains résultats classiques d'arithmétique, comme le lemme de Gauss, combinés à des outils standards d'analyse. Là encore, la difficulté résidait dans le bon maniement des comparaisons asymptotiques, et l'on obtenait *in fine* que la densité des entiers n pour lesquels $\omega(n)$ dévie de $\ln(\ln n)$ est asymptotiquement nulle.

2. Commentaires généraux

Le sujet présentait une longueur raisonnable, mais la difficulté des dernières questions de la seconde partie était particulièrement élevée : ainsi, peu de candidats ont pu traiter l'épreuve dans sa totalité. La première partie a été largement abordée dans sa globalité, tandis que la seconde partie n'a pas rencontré le même succès, le nombre de réponses à partir de la question 20.a. diminuant significativement. Soulignons qu'il était d'ailleurs parfaitement possible de commencer sa composition en traitant en premier lieu la seconde partie, stratégie qui n'a été adoptée que dans quelques rares copies. Notons finalement qu'il n'était pas nécessaire de traiter l'ensemble du sujet pour obtenir une excellente note.

Le niveau global des copies a été satisfaisant, mais nous avons pu observer certaines erreurs systématiques. Tout d'abord, nous avons été surpris que la question 5.b. ait occasionné tant d'erreurs, l'écriture de la matrice d'une application linéaire dans deux bases différentes au départ et à l'arrivée semblant source de confusion. Ensuite, la manipulation des comparaisons asymptotiques n'est pas maitrisée, et de nombreux candidats ont ainsi affirmé par exemple qu'un $o(1)$ était nécessairement un $O((\ln n)/n)$. Une autre erreur fréquente était de raisonner avec des équivalents, sans comprendre que le résultat demandé était un developpement limité beaucoup plus fin. Nous avons également constaté que l'utilisation du lemme de Gauss n'était pas correctement intégrée. Nous détaillerons nos observations question par question plus avant.

Enfin, comme chaque année, voici quelques recommandations d'ordre général. Tout d'abord, rappelons que tout résultat hors programme ne peut être utilisé sans démonstration préalable. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). De plus, un soin minimal et une écriture lisible sont exigés. Rappelons aussi que, si la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires. A ce sujet, notons d'ailleurs que la stratégie de survoler le sujet en ne répondant qu'aux questions les plus simples ne permet pas d'aboutir à une note satisfaisante. Enfin, précisons encore une fois que l'utilisation de résultats antérieurs nécessite d'une part de préciser à la fois la question et le résultat utilisé, mais également d'expliquer comment l'argumentation s'articule autour de celui-ci, toute formulation vague étant systématiquement sanctionnée.

La moyenne des notes des 2690 candidats est de 8,16/20 avec un écart-type de 4,01.

3. Examen détaillé des questions

Partie 1.

1a. Une première question sans difficulté, et en général bien traitée. Une erreur surprenante, mais récurrente, était l'affirmation que le polynôme $(X-1)^{n-1}\cdot(X-1+n)$ est scindé à racines *simples*, ou, de manière en quelque sorte équivalente, qu'une matrice est diagonalisable dès lors que son polynôme caractéristique est scindé. Pour la détermination des sous-espaces propres, une réponse du type $E_\lambda = \ker(\lambda I - M)$ n'était bien sûr pas suffisante.

1b. Il fallait utiliser la formule de Leibniz sur le déterminant pour bien justifier l'égalité des polynômes.

2. Le lien avec la formule établie dans la question précédente et les opérations de dérivation et intégration a en général bien été observé. À noter qu'il fallait distinguer le cas $n = 2$ dans le second calcul, et que le troisième calcul fut source de nombreuses erreurs.

3. Question bien traitée, certains candidats ayant opté pour démontrer l'égalité entre cardinaux sans faire usage de la première formule établie à la question 2.

4. L'observation que $\sigma \in \mathfrak{D}_n$ si et seulement si $\nu(\sigma) = 0$ n'a pas posé de difficulté. L'utilisation de celle-ci combinée à la formule établie en 1.b. en $x = 1$ pour déduire le résultat demandé a été moins systématiquement faite.

5a. Il fallait remarquer que les deux familles étaient à degrés échelonnés, <u>mais aussi</u> de cardinal maximal.

5b. On utilisait ici la formule du binôme pour conclure rapidement. Beaucoup de candidats ont cependant répondu sans y faire appel, ce qui les a pénalisés par une perte de temps.

5c. Le caractère inversible de la matrice, étant triangulaire, a été bien remarqué par l'ensemble des candidats. Quant à la matrice inverse, il fallait utiliser à nouveau la formule du binôme pour obtenir le résultat rapidement. Si alternativement on utilisait la suite de l'énoncé pour conjecturer sa forme, une justification était indispensable.

5d. Il fallait prendre garde à bien interpréter matriciellement la famille d'égalités pour pouvoir les inverser. Une source fréquente d'erreur a été la confusion entre la matrice et sa transposée.

6. Il fallait ici dénombrer les permutations en utilisant point fixes et dérangements des points non-fixes, puis utiliser la question précédente. Ceci a été globalement assez bien réussi.

7.a. et 7.b. Questions sans difficulté, à condition de se souvenir de la question 4.

8.a. On revenait au travail de dénombrement fait en question 6. Certains candidats ont d'ailleurs su répondre sans avoir traité cette dernière.

8.b. Pas de difficulté particulière pour ce calcul de limite, bien exécuté par l'ensemble des candidats ayant répondu correctement à la question précédente.

8.c. La première stratégie consistait en un calcul de somme de série, qui demandait à être justifié soigneusement. Une seconde stratégie, plus élégante et moins calculatoire, consistait en l'observation que la variable aléatoire Z_n pouvait se décomposer en la somme des fonctions indicatrices "i est un point fixe", puis l'utilisation de la linéarité de l'espérance.

9. Calculs de dénombrement ayant occasionné beaucoup d'erreurs. Très peu de copies ont réussi à répondre correctement.

10. La première partie de la question consistait en la détermination du nombre de permutations se décomposant en un unique cycle, ou bien en un nombre maximal de cycles, ce qui a assez largement été réussi. La seconde partie était plus délicate, et demandait de bien justifier la relation de récurrence en évitant des formulations trop vagues. À ce stade, certains candidats se sont perdus, et ont confondu nombre de cycles avec nombre de points fixes.

11. Pour cette question, il fallait prendre garde à bien démarrer la récurrence par le cas $n = 1$ qui ne posait aucune difficulté. Ensuite, on utilisait la relation de récurrence démontrée précédemment et qui n'était valable que pour les entiers k entre 2 et $n-1$, les termes résiduels devant être traités indépendamment. Ceci a été source d'erreurs, et illustre l'exigence de concentration que réclame ce type de sujet.

12. Il fallait dériver l'égalité que l'on venait d'établir et l'évaluer en 1, ce qui une fois identifié ne posait aucune difficulté.

13.a. Il fallait ici dériver deux fois l'égalité établie à la question 11. et l'évaluer toujours en 1, ce qui ne posait toujours aucune difficulté. Question largement traitée dans son ensemble.

13.b. Une déduction quasi évidente, qui n'a pas échappé aux personnes survolant le sujet à la recherche de points.

14.a. Question plus délicate, pour laquelle il fallait traiter avec prudence les comparaisons asymptotiques. En particulier, la constante γ n'est pas un $O((\ln n)/n)$, et il fallait justifier rigoureusement l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

la formulation obtenue en remplaçant ci-dessus le $O(\frac{1}{n})$ par un $o(1)$ ne permettant pas de conclure.

15. L'erreur largement répandue fut d'invoquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev au lieu de l'inégalité de Markov, la première faisant intervenir l'espérance de la variable aléatoire qui différait du terme $\ln n$ duquel on observait la déviation.

Partie 2.

16. Une première question de cette seconde partie amplement traitée, qui demandait d'utiliser la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale, et utiliser le caractère constant par morceaux de la fonction A, l'intégration par parties étant ici proscrite.

17.a. Pas de difficulté ici.

17.b. Question accessible, largement traitée par les candidats.

17.c. La justification de la divisibilité semblait anodine, mais nous avons pu constater qu'un grand nombre de candidats ne savaient pas y répondre rigoureusement. En particulier, l'utilisation du lemme de Gauss n'est pas correctement intégrée.

17.d. Question de conclusion qui n'a pas posé de difficulté particulière.

18. Il n'était pas nécessaire de savoir justifier la formule pour pouvoir traiter la double inégalité.

19.a. Une question largement traitée, car on pouvait en particulier y répondre sans être plongé dans le sujet. Ici encore, il fallait être prudent dans la manipulation des comparaisons asymptotiques, et bien justifier l'apparition du $O(\ln n)$.

19.b. Une question de synthèse, où il fallait combiner les questions 18. et 17.

19.c. Une autre question largement traitée, car indépendante des questions antérieures.

19.d. Il fallait combiner les questions précédentes. Rappelons que la phrase "On déduit le résultat des questions précédentes" n'est pas une réponse correcte, et qu'il est important d'articuler son argumentation de manière détaillée.

20.a. L'énoncé suggérait d'utiliser la question 16., ce qui facilitait grandement la tâche.

20.b. La fonction $R(t)$ étant bornée par la question 19.d., il fallait justifier que l'intégrale $\int_2^{\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt$ convergeait, ce qui était direct.

20.c. Question où le manque de précision dans le traitement des comparaisons asymptotiques s'est encore manifesté, même si le nombre de candidats l'ayant abordé fut restreint. A noter que la question demandait de majorer le reste de l'intégrale étudiée précédemment.

21.a. Question facile, repérée par les candidats partis à la pêche aux points.

21.b. Question peu traitée, malgré l'indication donnée par l'énoncé.

22.a. et 22.b. Questions relativement faciles, mais peu traitées.

22.c. et 22.d. Questions bien plus délicates, et logiquement traitées que de manière exceptionnelle.

23. On démontrait ici que l'ensemble des entiers n, pour lesquels le cardinal de l'ensemble des nombres premiers divisant n dévie du terme $\ln(\ln n)$, a une densité asymptotique nulle. Le nombre de candidats ayant su traiter cette question s'est révélé, lui aussi, de densité nulle. À leur décharge, cette question était la plus difficile et demandait une profonde réflexion.