BANQUES MP/MPI INTER-ENS – SESSION 2024
RAPPORT DE L'ÉPREUVE ORALE MATHS L

JOON KWON, MICKAËL LATOCCA & LOÏC DE RAPHÉLIS

L'épreuve orale Maths L concerne le concours d'entrée à l'ENS de Lyon de la filière MP options MP et MPI. Son coefficient est de 16,2% du total d'admission.

Nous avons examiné cette année 240 candidates et candidats. Nous discutons ici du déroulement de l'épreuve, rappelons certains principes importants, commentons la répartition des notes, et donnons enfin quelques-uns des énoncés.

1. Commentaires généraux

1.1. **Conditions de l'épreuve.** L'épreuve dure 45 minutes, sans préparation préalable, avec un jury composé d'une seule personne. Après émargement et vérification de la pièce d'identité, l'énoncé est dicté. Le jury ne s'autorise à intervenir qu'après 10 à 15 minutes, s'il l'estime nécessaire.

1.2. **Critères d'évaluation.** Les critères principaux sont :

- la maîtrise du cours dans sa profondeur et lors de son application ;
- la capacité à s'approprier l'exercice ;
- la capacité adopter une bonne démarche de recherche, en autonomie ;
- la capacité à se corriger, à prendre du recul sur les pistes explorées, et à en proposer de nouvelles ;
- la réactivité aux remarques et indications du jury.

1.3. **Niveau des candidates et candidats.** Le niveau général est élevé, le programme est presque toujours maîtrisé, mais quelques points qui ont pu poser des difficultés.

- Une fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la dérivée est positive sur un intervalle y est croissante. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis, mais cela n'a pas toujours été retrouvé. On ne peut rien conclure de tel si la seule information est que cette fonction a une dérivée positive en un point, cela n'a pas toujours été vu.
- La manipulation des fonctions convexes dans $\mathbb{R}$ n'a pas toujours été aisée. Certains ont peiné à voir qu'une fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.
- Nous avons observé des erreurs de raisonnement dans les extractions de sous-suites. Par exemple, si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite bornée, $a_n - a_{n-1}$ ne tend vers nécessairement 0. Mais certain(e)s candidat(e)s l'ayant affirmé se sont corrigé(e)s en prétendant qu'il "suffi[sai]t d'extraire sur a_n puis de ré-extraire sur $a_{\varphi(n)-1}$", ne se rendant pas compte que les limites de ces deux sous-suites ne sont pas nécessairement les mêmes.
- L'établissement d'inégalités impliquant des produits scalaires et des normes ont parfois posé des difficultés lorsque des inégalités classiques on été essayées tous azimuts, sans stratégie préalable.
- Les manipulations élémentaires avec les matrices, leur transposée et la trace ont parfois posé des difficultés.

1.4. **Cadre du programme.** Aucun exercice ne nécessite l'usage de notions hors-programme.

- Le cadre du programme de probabilités est celui des variables aléatoires dites *discrètes*, c'est-à-dire dont l'image est un *ensemble dénombrable*, et non *discret*. En particulier, il n'est pas possible, en général, d'ordonner ces valeurs. Nous considérons qu'il s'agit d'un détail à la marge du programme, et nous n'avons pas insisté sur cette subtilité.
- Nous avons proposé des exercices faisant intervenir des applications contractantes, ou 1-Lipschitziennes. Dans tous les cas, l'énoncé supposait l'existence d'un point fixe pour ces applications, et il n'était pas nécessaire de parler de complétude, ni de détourner l'usage de la convergence absolue des séries pour obtenir l'existence d'un point fixe.
- La réduction de Jordan n'est pas au programme. Si un candidat ou une candidate souhaitait l'utiliser (ce qui peut être pertinent), il ou elle était invité(e) à la redémontrer.
- Quelques rares candidats ont voulu faire usage de leurs connaissances (partielles) sur les modules, ou sur des résultats avancés de la théorie des groupe. Leur apparente maîtrise initiale n'a pas résisté à l'examen. Nous ne sanctionnons évidemment pas la culture, mais nous sommes déçus par le décalage qui apparaît lorsque, par exemple, le candidat ne se rend pas compte que si y est un élément d'ordre 2 et x est d'ordre 4, alors $y \neq x$. D'une manière générale, l'invocation de notions non maîtrisées n'est pas appréciée en mathématiques.

1.5. **Remarques et conseils.** Voici donc quelques remarques sur ce que nous jugeons inadéquat lors de l'oral, ainsi que quelques conseils généraux qui s'appuient sur les critères d'évaluations évoqués précédemment.

- Ne pas essayer de plaquer la solution d'un exercice similaire mémorisé.
- La plupart des exercices peuvent être abordés en renforçant les hypothèses ou en traitant des cas particuliers qui donnent de l'intuition, par exemple en commençant par les petites dimensions. Dans certains cas, le traitement d'un seul exemple bien choisi donne toutes les idées nécessaires à la résolution générale. Beaucoup le font, mais pas tous, malheureusement.
- Trop de candidates et candidats semblent réfractaires au calcul, alors que dans de nombreux cas, celui-ci donne la solution, ou au moins des idées. D'autres, à l'inverse, tentent des approches excessivement calculatoires et vouées à l'échec (e.g. avec coefficients indéterminés dans des matrices de taille 3 ou plus).
- Certain(e)s candidat(e)s nous ont demandé s'ils devaient parler dès le début de l'épreuve. Nous n'avons pas de préférence a priori, tant que ce qui est dit est pertinent, ou en tout cas, nous éclaire sur la démarche envisagée. Il faut toutefois se garder de tout excès (voir les deux points suivants).
- Les exercices sont souvent difficiles et il n'est pas attendu qu'ils soient résolus sans aide. Néanmoins, nous valorisons la prise d'initiative et la combativité. Une fois passé un temps initial de réflexion, il n'est pas bien perçu d'attendre une indication sans rien proposer ni écrire. Il est important d'expliquer de temps en temps sa démarche.
- À l'inverse, certains candidats parlent en continu et donnent voix à leur réflexions internes. Il devient alors difficile de savoir si le candidat se parle à lui-même ou s'il s'adresse à l'examinateur.
- Les candidates et candidats ne doivent pas *sonder* l'examinateur en proposant plusieurs pistes et en observant la réaction de celui-ci.
- Lorsque l'examinateur demande une précision, il est important de la donner, même si elle est simple. Elle est parfois faussement simple, ou carrément fausse ; cela permet alors au candidat de se corriger.

2. Résultats

2.1. **Distribution des notes.** Voici la distribution des notes des 240 oraux. La moyenne est de $12,7/20$ et l'écart-type de $2,8$. La note maximale de $20/20$ a été donnée une fois.

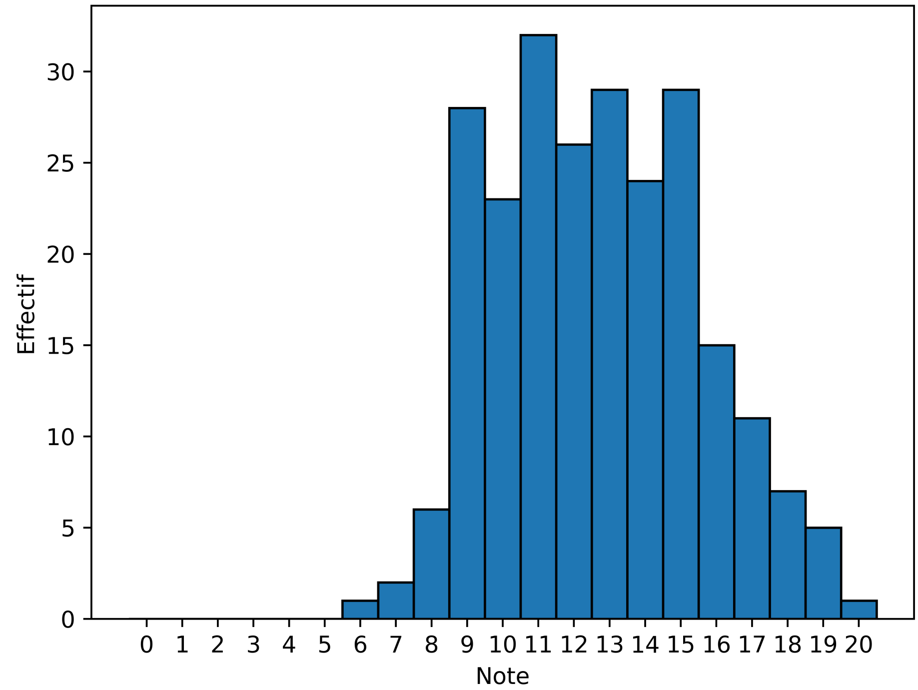

Figure 1 – Répartition des notes

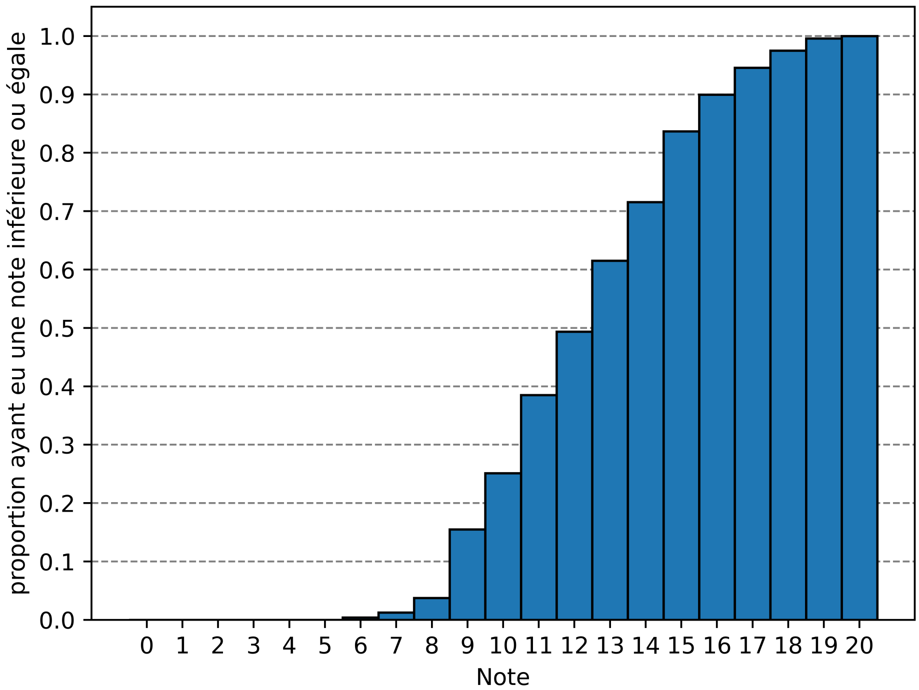

Figure 2 – Effectifs cumulés

L'interprétation des notes peut être faite ainsi.

- Défaillances majeures : 7 et en dessous.

- Insuffisant, laborieux, nécessitant beaucoup d'aide : 8, 9, 10.
- Moyen, autonomie limitée, et manque de recul éventuel : 11, 12.
- Correct : 13, 14.
- Bonne prestation, bonne autonomie, bon recul : 15, 16, 17.
- Excellent : 18, 19, 20.

3. Quelques exercices

Nous signalons ici qu'un des exercices donné à l'oral (dont l'énoncé ne figure pas ci-dessous) a été proposé avec un énoncé incomplet, ce qui nous avons immédiatement détecté : nous en avons tenu compte dans l'évaluation.

Énoncé 1

Pour $k \geqslant 3$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Im} z > 0$, on note

$$G_k(z) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+nz)^k}.$$

(1) Montrer que $G_k(z)$ est bien défini pour tout complexe z tel que $\operatorname{Im} z > 0$ et que la fonction $(x,y) \mapsto G_k(x+iy)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

(2) Montrer que $G_k(iy)$ admet une limite quand $y \to \infty$.

(3) Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+in)^2}$$

et

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+in)^2},$$

où dans les deux cas la somme exclu $(n,m) = (0,0)$. Ces limites sont-elles égales ?

Énoncé 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, uniformément continue, dont une primitive est bornée et telle que pour tout $x > 0$ on a

$$|f(x)| \leqslant \frac{2}{x^2} \int_0^x (x-y)|f(y)|\mathrm{d}y.$$

Montrer que $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Quelles généralisations peut-on étudier ?

Énoncé 3

Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|v_i\|_2 \leqslant 1$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [-1,1]$ et $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe des $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1,1\}$ tels que $v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i$ satisfait

$$\|v-w\|_2 \leqslant \sqrt{n}.$$

Énoncé 4

Soit E un espace vectoriel, $C \subset E$ un ensemble convexe non vide, $a < b$ deux réels, et F l'ensemble des fonctions $f : C \longrightarrow [a,b]$ convexes. Soit $x, y \in C$ fixés. Déterminer

$$\sup_{f\in F} \left(f(y) - f(x)\right).$$

Déterminer les cas où le supremum est atteint.

Énoncé 5

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien, $F : E \to E$ une application et $G = \frac{1}{2}(I - F)$ où I est l'identité sur E.

(1) Montrer que F est 1-lipschitzienne pour $\|\cdot\|$ si, et seulement si,
$$\forall x, x' \in E, \quad \langle G(x') - G(x), x' - x\rangle \geqslant \|G(x') - G(x)\|^2 .$$

(2) On suppose que F est 1-lipschitzienne pour $\|\cdot\|$ et qu'il existe $x_* \in E$ tel que $F(x_*) = x_*$ (autrement dit x_* est un point fixe de F). Soit $x_1 \in E$ et pour $n \geqslant 1$, on pose
$$x_{n+1} = \frac{x_n + F(x_n)}{2}.$$
Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\|F(x_n) - x_n\| \leqslant \frac{2\,\|x_1 - x_*\|}{\sqrt{n}}.$$

(3) En déduire que si E est un espace euclidien, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un point fixe de F.

Énoncé 6

On définit
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}. \end{array}$$
Déterminer $\varphi(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$.

Énoncé 7

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la manière suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = e^{-i\mathrm{Im}(z_n)} z_n.$$
Déterminer les valeurs de z_0 pour lesquelles cette suite converge.

Énoncé 8

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On note pour tout $\alpha \geqslant 0$
$$\mathcal{R}_\alpha := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0;1]^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n a_n \leqslant \alpha\}.$$
Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive sommable. Pour tout $\alpha > 0$, construire une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\alpha$ telle que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n b_n = \max_{(u_n)\in\mathcal{R}_\alpha} \{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n b_n\}.$$

Énoncé 9

Soit $n \geqslant 1$ un entier, $L \in]0,1[$, et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application L-lipschitzienne pour $\|\cdot\|_\infty$, et $x_* \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x_*) = x_*$.

(1) Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et pour $k \geqslant 1$ on définit par récurrence, $x_{k+1} = F(x_k)$. Montrer que $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_*$.

(2) Pour $I \subset \{1, \dots, n\}$, on note $F^{|I} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $1 \leqslant i \leqslant n$ par
$$F^{|I}(x)_i = \begin{cases} F(x)_i & \text{si } i \in I \\ x_i & \text{si } i \notin I. \end{cases}$$
Montrer que $F^{|I}$ est 1-lipschitzienne pour $\|\cdot\|_\infty$.

(3) Soit $(I_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$ telle que chaque indice $i \in \{1,\dots,n\}$ appartient à une infinité de ces ensembles. Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et pour $k \geqslant 1$ on pose,

$$x_{k+1} = F^{|I_k}(x_k).$$

Montrer que cette suite converge vers x_*.

Énoncé 10

Soit $p \geqslant 1$ un entier et on note $\Delta_p = \{x \in \mathbb{R}_+^p,\ \sum_{i=1}^p x_i = 1\}$. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique point $\pi_{\Delta_p}(x) \in \Delta_p$ tel que pour tout $z \in \Delta_p$,

$$\left\langle z - \pi_{\Delta_p}(x), x - \pi_{\Delta_p}(x) \right\rangle \leqslant 0.$$

(1) Soit $x, u \in \mathbb{R}^p$ et $x' = \pi_{\Delta_p}(x+u)$. Montrer que pour tout $z \in \Delta_p$,

$$2\langle u, z - x\rangle \leqslant \|z - x\|_2^2 - \|z - x'\|_2^2 + \|u\|_2^2.$$

Soit $n, m \geqslant 1$ deux entiers et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Soit $x_1 \in \Delta_m$, $y_1 \in \Delta_n$, et $(\gamma_k)_{k\geqslant 1}$ une suite strictement positive. Pour $k \geqslant 2$, on définit par récurrence

$$x_{k+1} = \pi_{\Delta_m}(x_k + \gamma_k A y_k) \qquad \text{et} \qquad y_{k+1} = \pi_{\Delta_n}(y_k - \gamma_k A^\top x_k).$$

(2) Pour $N \geqslant 1$, on note $\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_k$ et $\bar{y}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N y_k$. Montrer qu'il existe une suite $(\gamma_k)_{k\geqslant 1}$ pour laquelle

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\max_{x\in\Delta_m}\langle x, A\bar{y}_N\rangle - \min_{y\in\Delta_n}\langle \bar{x}_N, Ay\rangle\right) = 0.$$

(3) En déduire que

$$\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n}\langle x, Ay\rangle = \min_{y\in\Delta_n}\max_{x\in\Delta_m}\langle x, Ay\rangle.$$