ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2024

MARDI 16 AVRIL 2024
08h00 - 12h00

FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 3

MATHEMATIQUES B (X)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet comporte quatre parties. La première partie est indépendante des trois autres.

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note également $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Si E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et si $v_1, \ldots, v_k$ sont des éléments de E, on note $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$.

Si $k \geqslant 1$ est un entier et si E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans E.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Si U est un ouvert de E et $f : U \to E$ une fonction différentiable, pour tout $x \in U$ on note $df(x)$ la différentielle de f en x. On rappelle que $df(x)$ est alors un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de E. Si g est un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de E, on note $\|g\|$ sa norme d'opérateur, c'est-à-dire

$$\|g\| = \sup\{\|g(v)\| \mid v \in E,\ \|v\| \leqslant 1\}.$$

Pour $a \in E$ et $r > 0$ un nombre réel positif, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et rayon r et $\overline{B(a, r)}$ la boule fermée de centre a et rayon r.

On note Id_E l'application identité de E dans E.

Si p et q désignent deux entiers naturels non nuls, on note $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si $p = q$, on note $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ pour $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. On identifie également le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ avec le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des vecteurs colonnes $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\exp(A) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ l'exponentielle de la matrice A.

Première partie

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, périodique de période $T > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0. \tag{1}$$

1a. Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à (1) telles que :

$$\begin{cases} y_1(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2(0) &= 0 \\ y_2'(0) &= 1. \end{cases}$$

Justifier que $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ est l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1b. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1.$$

2. Montrer que si $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une solution de (1), alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ l'est aussi. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t).$$

3. Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = e^{\lambda T}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(a) L'équation (1) possède une solution $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle qui vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu y(t).$$

(b) Le nombre complexe μ est solution de l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - \big(y_1(T) + y_2'(T)\big)x + 1 = 0.$$

(c) L'équation différentielle (1) possède une solution $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{\lambda t}u(t),$$

où $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction T-périodique.

4. Soient μ_1, μ_2 les racines complexes de l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - (y_1(T) + y_2'(T))x + 1 = 0.$$

4a. Montrer que si $\mu_1 \neq \mu_2$ et si λ est un nombre complexe tel que $\mu_1 = e^{\lambda T}$, alors pour toute solution y de (1), il existe deux fonctions T-périodiques w_1 et w_2, ainsi que deux nombres complexes α et β tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha e^{\lambda t}w_1(t) + \beta e^{-\lambda t}w_2(t).$$

4b. Supposons que $\mu_1 = \mu_2$. Montrer que $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$ et que l'équation (1) admet une solution périodique dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Deuxième partie

Soit $a \in E$ et soit U un ouvert de E contenant a. Soit $f : U \to E$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telle que $df(a) = \mathrm{Id}_E$.

5a. Soient V un ouvert convexe de E et h une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de V dans E. On suppose qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in V$, $\|dh(x)\| \leqslant C$. Montrer que pour tous x_1 et x_2 dans V, on a $\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant C\|x_2 - x_1\|$.

5b. Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset U$ et

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B(a,r)}, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Nous fixons désormais un réel $r > 0$ vérifiant ces conditions dont la valeur sera utilisée dans la suite des questions de cette deuxième partie.

5c. Montrer que pour tout $x \in B(a,r)$, l'application linéaire $df(x)$ est injective.

6. Soit $y_0 \in E$ tel que $\|y_0 - f(a)\| \leqslant \frac{r}{4}$.

6a. Montrer que l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \overline{B(a,r)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|y_0 - f(x)\|^2 \end{array}$$

admet un minimum atteint en un point x_0 de $B(a,r)$.

6b. Montrer que $f(x_0) = y_0$.

7. On note $W = \{y \in E \mid \|y - f(a)\| < \frac{r}{4}\}$ et $V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$.

7a. Justifier que V et W sont des ouverts de E.

7b. Montrer que

$$f_{|V} : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une bijection continue de V sur W dont la réciproque est une fonction continue sur W.

Troisième partie

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{C}[A]$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme $P(A)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme. On note

$$(\mathbb{C}[A])^* = \{B \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B^{-1} \in \mathbb{C}[A]\}.$$

8a. Justifier que $\mathbb{C}[A]^*$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

8b. Montrer que $(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

9. Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$.

10. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'application

$$Z_a : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t + iat(1-t). \end{array}$$

10a. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc}]0,1[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t,a) & \longmapsto & Z_a(t) \end{array}$$

est injective.

10b. Soient M_1 et M_2 deux éléments de $(\mathbb{C}[A])^*$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [0,1], \quad M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*.$$

10c. En déduire que $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs.

11a. Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant 0 et un ouvert V de $\mathbb{C}[A]$ contenant la matrice identité I_n tels que la fonction exponentielle induit une bijection continue de $U \subset \mathbb{C}[A]$ sur V dont la réciproque est une fonction continue sur V.

11b. En déduire que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

12. Montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.

13. On veut montrer que $\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*$. On suppose que $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq (\mathbb{C}[A])^*$ et on fixe $M_1, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$ telles que $M_1 \in \exp(\mathbb{C}[A])$ et $M_2 \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

13a. Montrer qu'il existe une application continue f de $(\mathbb{C}[A])^*$ dans $\{0, 1\}$ telle que $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$.

13b. Conclure.

14. Conclure que $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Quatrième partie

Soient $T > 0$ un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel. Soit

$$A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & A(t) \end{array}$$

une application continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. On considère le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{2}$$

où X est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

15. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ et une solution $Y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ non nulle de (2) tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t + T) = \mu Y(t).$$

Soit $\mathscr{S}$ l'espace des solutions dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de (2). Soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ une base de $\mathscr{S}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ la matrice dont les colonnes sont $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$. On dispose ainsi d'une application M de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

16a. Montrer que pour tout nombre réel t, $M(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M'(t) = A(t)M(t)$.

16b. Montrer que la matrice $(M(t))^{-1}M(t + T)$ est indépendante de $t \in \mathbb{R}$.

16c. En déduire qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t)\exp(TB).$$

16d. En déduire qu'il existe une application $Q : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t) = Q(t)\exp(tB).$$

(On appelle cette identité la forme normale de la matrice M).

On admet qu'il existe deux matrices D et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que D est diagonalisable, N est nilpotente et

$$B = D + N \quad \text{et} \quad DN = ND.$$

Il existe donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ telles que $D = P\Delta P^{-1}$.

17a. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_n(t) \in \mathbb{C}^n$ les colonnes de la matrice $M(t)P$. Montrer que $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est une base de l'espace $\mathscr{S}$.

17b. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les nombres complexes tels que $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Pour tous $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $R_{i,k}(t)$ la k-ième colonne de la matrice $\dfrac{1}{i!}Q(t)N^iP$. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$Z_k(t) = e^{\lambda_k t}\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_{i,k}(t)\right)$$

et vérifier que les applications $R_{i,k}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques.

17c. En déduire que si les parties réelles des λ_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ sont strictement négatives et si Y est une solution quelconque de (2), alors

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0.$$

18a. Montrer que si B a une valeur propre de la forme $\lambda = i\frac{2k\pi}{mT}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors (2) a une solution mT-périodique non nulle.

18b. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que (2) possède une solution mT-périodique non nulle. Montrer que $\exp(TB)$ possède une valeur propre qui est une racine m-ième de l'unité.

19. Dans cette question, on suppose que (2) possède une solution T'-périodique X avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.

Montrer que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$A(u)X(t) = A(t)X(t).$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas de la forme $\mathbb{Z}a$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

20. On suppose dans cette question qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^n$, différent de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$, tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, V est stable par $A(t)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et sur B pour que (2) ait au moins une solution périodique non nulle.

21. Soit le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t), \tag{3}$$

où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.
On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $\exp(TB)$. Montrer que (3) possède une unique solution T-périodique.

22. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - \cos(t)y(t) \\ y'(t) = \cos(t)x(t) + y(t) \end{cases}$$

et déterminer sa forme normale (voir la question **16d**).