ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

ÉCOLE DES MINES DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2024

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Lyon, Paris, Paris-Saclay, à l'ENPC et aux Mines Paris

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

***

Le sujet comprend 4 pages numérotées de 1 à 4. Il porte sur des modèles de compétition entre populations. Il comporte quatre parties indépendantes.

Il est recommandé de lire attentivement et patiemment le sujet. Il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Début de l'épreuve

Première partie : Équation de compétition entre deux populations

On considère l'équation :

$$u'(t) = u(t)\big(r_1 - u(t)\big) \tag{1}$$

avec $r_1 > 0$ et une donnée initiales strictement positive $u(0) > 0$. On admettra qu'il existe une solution $u(t)$ pour tout $t \geqslant 0$, de classe $\mathcal{C}^1$.

1) a) Trouver l'équation satisfaite par la fonction $p := 1/u$ et résoudre cette équation.

b) En déduire que

$$u(t) = \frac{u(0)r_1}{r_1 e^{-r_1 t} + u(0)\big(1 - e^{-r_1 t}\big)}.$$

c) En déduire la limite de u quand $t \to +\infty$.

On considère maintenant le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u'(t) & = & u(t)\big(r_1 - u(t) - v(t)\big), \\ v'(t) & = & v(t)\big(r_2 - u(t) - v(t)\big), \end{array} \right. \tag{2}$$

avec données initiales strictement positives $u(0) > 0$, $v(0) > 0$. On admettra qu'il existe une solution $\big(u(t), v(t)\big)$ pour tout $t \geqslant 0$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Ce système d'équations modélise la dynamique de deux populations de densités u et v, respectivement de taux de croissance r_1 et r_2, en compétition pour une même ressource.

On suppose que $r_1 > r_2 > 0$.

2) On définit $\rho(t) := u(t) + v(t)$, $U(t) := e^{\int_0^t \rho(s)ds} u(t)$ et $V(t) := e^{\int_0^t \rho(s)ds} v(t)$.

a) Montrer que $U(t) = e^{r_1 t} u(0)$ et $V(t) = e^{r_2 t} v(0)$.

b) Montrer que $\frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t \rho(s)ds}\right) = \rho(t) e^{\int_0^t \rho(s)ds}$ et en déduire que :

$$e^{\int_0^t \rho(s)ds} = 1 + \frac{e^{r_1 t} - 1}{r_1} u(0) + \frac{e^{r_2 t} - 1}{r_2} v(0).$$

c) En déduire $u(t)$ et $v(t)$ en fonction de $r_1, r_2, u(0), v(0)$. On pourra vérifier que ce résultat est cohérent avec la question $1.b)$ quand $v(0) = 0$.

d) Montrer que $\lim_{t \to +\infty} u(t) = r_1$ et $\lim_{t \to +\infty} v(t) = 0$.

Deuxième partie : Équation linéaire à 2 compétiteurs avec mutations

On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} r_1 - d & d \\ d & r_2 - d \end{pmatrix},$$

avec $r_1 > r_2 > 0$ et $d > 0$.

3) a) Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et admet 2 valeurs propres réelles, que l'on note λ_1 et λ_2, ordonnées par $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$.

On note $A = P^{-1}DP$, où P est une matrice 2×2 inversible et

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

b) Rappeler pourquoi on peut supposer que P est orthogonale, c'est-à-dire que sa transposée P^T est égale à son inverse P^{-1}.

c) Montrer que pour tout vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a $X^T AX \leqslant \lambda_1 \; X^T X$ (on pourra supposer dans un premier temps que $P = I_2$, la matrice identité d'ordre 2, puis poser $Y = PX$).

On considère maintenant le système d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} U'(t) & = & (r_1 - \lambda_1)U(t) & + & dV(t) & - & dU(t), \\ V'(t) & = & (r_2 - \lambda_1)V(t) & + & dU(t) & - & dV(t), \end{array} \right. \tag{3}$$

avec données initiales strictement positives $U(0) > 0$ et $V(0) > 0$. On admettra qu'il existe une solution $\big(U(t), V(t)\big)$ pour tout $t \geqslant 0$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Autrement dit, si l'on introduit le vecteur colonne

$$X(t) := \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix},$$

alors $X'(t) = (A - \lambda_1 I_2)X(t)$.

On considère un vecteur propre non-nul

$$\hat{X} := \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}$$

de A associé à λ_1, c'est-à-dire que $A\hat{X} = \lambda_1 \hat{X}$.

4) Montrer que

$$\frac{r_1 \hat{u} + r_2 \hat{v}}{\hat{u} + \hat{v}} = \lambda_1.$$

On introduit la fonction à 2 variables définie pour tout $x > 0$, $y \geqslant 0$ par :

$$\mathcal{F}(x, y) := (x - \hat{u})^2 + (y - \hat{v})^2.$$

5) a) Déterminer le ou les points critiques de $\mathcal{F}$.

b) Soit

$$F(t) := \big(U(t) - \hat{u}\big)^2 + \big(V(t) - \hat{v}\big)^2.$$

Montrer que

$$F'(t) = 2 \; X(t)^T (A - \lambda_1 I_2) X(t).$$

En déduire que F est décroissante.

On admettra par la suite que $\lim_{t\to+\infty} U(t) = \hat{u}$ et $\lim_{t\to+\infty} V(t) = \hat{v}$.
On suppose maintenant que
$$\lambda_1 > 0$$
et on considère le système d'équations différentielles :
$$\begin{cases} u'(t) &= u(t)\big(r_1 - u(t) - v(t)\big) + dv(t) - du(t), \\ v'(t) &= v(t)\big(r_2 - u(t) - v(t)\big) + du(t) - dv(t), \end{cases} \tag{4}$$
avec données initiales strictement positives $u(0) > 0$ et $v(0) > 0$. On admettra qu'il existe une solution $\big(u(t), v(t)\big)$ pour tout $t \geqslant 0$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Ce système d'équations modélise la compétition entre deux populations de densité u et v, avec un taux de mutation d caractérisant les changements d'une population vers l'autre à chaque nouvelle génération.

6) On définit $\rho(t) := u(t) + v(t)$, $U(t) := e^{\int_0^t \rho(s)ds} u(t)$ et $V(t) := e^{\int_0^t \rho(s)ds} v(t)$.

a) Montrer que $t \mapsto \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix}$ est bien solution de (3).

b) Montrer que
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{r_1 u(t) + r_2 v(t)}{u(t) + v(t)} = \frac{r_1 \hat{u} + r_2 \hat{v}}{\hat{u} + \hat{v}}.$$

On admettra par la suite que $\rho = u + v$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et bornée.

7) a) Montrer que
$$\rho'(t) = \rho(t)\big(R(t) - \rho(t)\big),$$
où $R(t) := \frac{r_1 u(t) + r_2 v(t)}{u(t) + v(t)}$.

b) Soit $0 < \varepsilon < \lambda_1$. Rappeler pourquoi il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \geqslant t_0$, on ait $R(t) \geqslant \lambda_1 - \varepsilon/2$. Supposons que $\rho(t) \leqslant \lambda_1 - \varepsilon$ pour tout $t \geqslant t_0$. Montrer qu'alors $\rho(t) \geqslant \rho(t_0) e^{\varepsilon(t-t_0)/2}$. En déduire une contradiction.

c) Soit $t_1 \geqslant t_0$ tel que $\rho(t_1) > \lambda_1 - \varepsilon$. Supposons qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que $\rho(t_2) \leqslant \lambda_1 - \varepsilon$. Soit
$$t_3 := \min\{t \geqslant t_1,\ \rho(t) \leqslant \lambda_1 - \varepsilon\}.$$
Expliquer pourquoi t_3 est bien défini et $\rho(t_3) = \lambda_1 - \varepsilon$. Montrer que $\rho'(t_3) \geqslant (\lambda_1 - \varepsilon)\varepsilon/2$ et en déduire une contradiction. En conclure que $\rho(t) \geqslant \lambda_1 - \varepsilon$ pour tout $t \geqslant t_0$.

d) À l'aide de la méthode développée dans les questions précédentes, montrer qu'il existe $t_4 > 0$ tel que $\rho(t) \leqslant \lambda_1 + \varepsilon$ pour tout $t \geqslant t_4$. En conclure que $\lim_{t\to+\infty} \rho(t) = \lambda_1$.

e) En conclure que $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \hat{u}$ et $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \hat{v}$.

Troisième partie : signe des racines d'un polynôme de degré 3

On considère un polynôme d'ordre 3 à coefficients réels, qu'on écrit
$$Q(X) = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$
où $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

8) Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $Q(z) = 0$.

On suppose à partir de maintenant que ce polynôme admet 3 racines réelles, qu'on note z_1, z_2 et z_3, au sens où
$$Q(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3).$$

On les ordonne telles que $z_1 \geqslant z_2 \geqslant z_3$.

9) Montrer que Q' admet deux racines réelles $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, telles que $z_1 \geqslant y_1 \geqslant z_2 \geqslant y_2 \geqslant z_3$.

10) En déduire que $a_2^2 \geqslant 3a_1$.

11) On suppose dans cette question que les racines de Q sont strictement négatives, c'est-à-dire que $z_1 < 0$. Montrer que dans ce cas a_0, a_1 et a_2 sont strictement positifs.

12) On suppose maintenant que a_1, a_2 et a_3 sont strictement positifs. Montrer qu'alors les racines de Q sont strictement négatives, c'est-à-dire que $z_1 < 0$.

Quatrième partie : équation linéaire à 3 compétiteurs avec mutations

On considère dans cette partie le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} u'(t) & = & r_1 u(t) & + & dv(t) & - & du(t), \\ v'(t) & = & r_2 v(t) & + & du(t) & - & 2dv(t) + dw(t), \\ w'(t) & = & r_3 w(t) & + & dv(t) & - & dw(t), \end{array}\right. \tag{5}$$

avec $d > 0$, $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ et des données initiales strictement positives $u(0) > 0$, $v(0) > 0$ et $w(0) > 0$. On admettra qu'il existe une solution $\big(u(t), v(t), w(t)\big)$ pour tout $t \geqslant 0$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Autrement dit, si l'on note

$$X(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

et

$$A := \begin{pmatrix} r_1 - d & d & 0 \\ d & r_2 - 2d & d \\ 0 & d & r_3 - d \end{pmatrix}$$

alors $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t > 0$.

13) Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et admet 3 valeurs propres réelles, qu'on note λ_1, λ_2 et λ_3, ordonnées par $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$

On note $A = P^{-1}DP$, où P est une matrice 3×3 inversible et

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

On introduit le vecteur colonne $Y(t) := PX(t)$.

14) Montrer que $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0)$, $y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0)$ et $y_3(t) = e^{\lambda_3 t} y_3(0)$ pour tout $t > 0$.

15) En déduire que si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ et $\lambda_3 < 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} w(t) = 0$.

On considère un vecteur propre non-nul

$$\hat{X} := \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix}$$

de A, c'est-à-dire qu'il existe une valeur propre λ (égale à λ_1, λ_2 ou λ_3) telle que $A\hat{X} = \lambda\hat{X}$. Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{cccrcl} (r_1 - d)\hat{u} & +d\hat{v} & & = & \lambda\hat{u} \\ d\hat{u} & +(r_2 - 2d)\hat{v} & +d\hat{w} & = & \lambda\hat{v} \\ & d\hat{v} & +(r_3 - d)\hat{w} & = & \lambda\hat{w}. \end{array}\right.$$

16) Montrer que λ ne peut être égale ni à $r_1 - d$, ni à $r_3 - d$. En déduire que $\hat{u} \neq 0$, $\hat{v} \neq 0$ et $\hat{w} \neq 0$.

17) Montrer que $Q(\lambda) = 0$, où

$$Q(X) := (X + d - r_1)(X + 2d - r_2)(X + d - r_3) - d^2(2X + 2d - r_1 - r_3).$$

On pourra pour cela exprimer $\hat{u}$ et $\hat{w}$ en fonction de $\hat{v}$.

On suppose maintenant que $r_1 + r_2 + r_3 < 0$.

18) Montrer à l'aide de la question 12) qu'il existe $\overline{d} > 0$ tel que pour tout $d \geqslant \overline{d}$, on ait $\lambda_3 < 0$, $\lambda_2 < 0$ et $\lambda_1 < 0$.

Fin du sujet