Banque MP inter-ENS – Session 2024

Rapport relatif à l'épreuve orale de mathématiques SR

- **Ecoles partageant cette épreuve :**
  ENS Paris-Saclay, ENS Rennes
- **Coefficients** (en pourcentage du total des points de chaque concours) **:**
  — ENS Paris-Saclay
    * Concours MP Option MP : 23,1 %
  — ENS Rennes
    * Concours MP Option MP : 23,1 %
- **Membres du jury :**
  A. Bailleul, L. Gassot, R. Goudey, D. Lesesvre, R. Riblet, T. Untrau

Déroulement de l'épreuve

Cette année, 252 candidats et candidates ont passé l'oral de mathématiques spécifique pour les écoles normales supérieures de Rennes et Paris-Saclay, avec une proportion de candidates en baisse : 14 candidates au total, soit à peine plus de 5%. Il s'agit d'un oral sans préparation, d'une durée de 45 minutes. Une amorce d'énoncé est donnée, commençant en général par une question proche du cours, et pouvant introduire des notations ou des questions préparatoires pour la suite de l'exercice. L'intégralité des énoncés n'est pas toujours donnée, et la difficulté des questions posées et des étapes intermédiaires suggérées par l'examinateur dépendent du déroulé de l'oral. Les premières minutes de l'examen sont dédiées à un travail en autonomie durant lesquelles l'examinateur n'intervient pas. Cela a pour but de permettre au candidat ou à la candidate de s'approprier l'exercice en pleine concentration. Il est conseillé de ne pas négliger cette phase de préparation en initiant immédiatement une discussion avec le jury, et de ne pas hésiter à utiliser le tableau avec abondance lors de cette première phase, y compris comme brouillon : il n'est pas tenu rigueur de raisonnements ou résultats erronés écrits durant cette phase, pourvu qu'ils soient corrigés lors de la restitution orale. La suite de l'oral prend la forme d'une discussion avec le jury durant laquelle ce dernier intervient pour aiguiller ou questionner, que ce soit sur l'exercice ou bien sur une notion connexe. À la fin de l'oral, le jury ne fait aucun retour sur la prestation du candidat ou de la candidate. Par ailleurs, le candidat n'est pas autorisé à conserver ou à prendre en photo le matériel fourni lors de l'épreuve.

Sont évalués à la fois la méthode, la rigueur, la connaissance du cours et les compétences techniques, mais aussi l'autonomie, les idées, le recul sur le programme et l'exercice, ainsi que les capacités de communication. Il va sans dire qu'on ne peut que déconseiller aux futurs candidats et candidates de négliger un de ces points lors de leur préparation. En revanche, le jury n'évalue que très peu la capacité à trouver une solution astucieuse à un exercice : un candidat ou une candidate avançant à son rythme et avec rigueur vers la résolution du problème, en proposant de résoudre des cas particuliers bien choisis ou des résultats intermédiaires, et capable de rebondir sur les indications de l'examinateur, se verra attribuer une excellente note. De plus, un candidat ou une candidate qui reconnaît un exercice déjà fait et veut absolument restituer une méthode apprise, au détriment des orientations de l'examinateur, est assez mal perçu ; le jury attendrait par ailleurs d'une telle restitution une maîtrise très solide des arguments et des propriétés ou hypothèses sous-jacentes, ce qui n'a malheureusement pas toujours été le cas.

À l'abord d'une nouvelle question, le jury laisse le temps de creuser une piste et de réfléchir, puis engage rapidement la discussion. Selon les situations, cette discussion peut prendre plusieurs formes : l'examinateur peut demander des éclaircissements ou des corrections mineures sur la preuve proposée, une synthèse de l'idée de preuve ou au contraire, réclamer une rédaction plus précise et rigoureuse des arguments précédemment fournis par le candidat ou la candidate, ou suggérer d'explorer des cas particuliers ou des cas limites.

Évaluation générale

Le jury s'accorde à dire que l'ensemble des admissibles est de bon niveau, avec une connaissance approfondie du cours, de nombreux réflexes mathématiques et des qualités en calcul. On observe de temps en temps des personnes plus sensibles au stress, qui buttent sur les premières questions ; certaines se révèlent tout à fait capables par la suite, alors que d'autres semblent perdre courage au fur et à mesure de l'oral. Nous rappelons donc à l'ensemble des admissibles que le jury demeure toujours bienveillant, les questions du jury étant là pour aider à avancer dans l'exercice. Chaque année de nombreux candidats et candidates font de très bons oraux après un départ laborieux, et il ne faut pas chercher à interpréter la discussion avec le jury, les exercices étant très différents les uns des autres. Le but du jury n'est en aucun cas de piéger les candidats et candidates, par ailleurs déjà assez sujets au stress : si l'un d'eux se voit demander s'il est sûr de ce qu'il vient d'affirmer, c'est sans doute que l'interrogateur ou l'interrogatrice veut donner l'occasion de discuter pour clarifier l'énoncé, comprendre l'argument, mettre le doigt sur des imprécisions ou des contre-exemples, ou encore demander des une preuve plus précise des arguments. Le manque de justifications est aussi toujours relevé par un "pourquoi ?", auquel la réponse attendue n'est souvent que de bien citer un théorème au programme et de vérifier toutes ses hypothèses, ou de clarifier l'argument.

Comme les années précédentes, nous avons noté que de nombreuses personnes ne pensent pas à appuyer leur réflexion sur des dessins (ou des exemples simples) qui se révèlent parfois un soutien indispensable à la résolution d'un exercice et qui est, dans tous les cas, d'une grande aide pour clarifier son propos. Nous avons noté de très bon réflexes en probabilités ainsi que sur les théorèmes d'échanges de limites et d'intégrales. Il y a une plus grande disparité dans la compréhension des structures algébriques abstraites. Nous avons aussi été assez surpris des difficultés de certains candidats et candidates sur des questions de dénombrement. L'algèbre linéaire, pourtant bien maîtrisée lors des années précédentes, a posé de nombreux problèmes y compris dans des arguments simples de réduction et de manipulations matricielles.

Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidates et candidats et n'ont aucun caractère absolu ; il ne s'agit que de classer les admissibles dans le contexte d'un exercice particulier. Ainsi, des candidats ou candidates peuvent recevoir des notes relativement basses. Elles n'enlèvent rien à l'estime que le jury porte aux efforts de leur préparation et ne préjugent en rien de leurs qualités de futures mathématiciennes et mathématiciens.

Conseils pour les futurs admissibles

Ces conseils recoupent en grande partie ceux des années précédentes.

- On voit trop de candidats et candidates refuser de rédiger leurs preuves et se contenter d'en répéter l'idée générale, malgré l'insistance du jury. Si l'exposé de la stratégie de preuve est apprécié par le jury, sa mise en œuvre se révèle souvent plus délicate qu'il n'y paraît. Il faut donc donner au moins autant de détails que ce que le jury le demande : rédiger proprement une preuve, vérifier les hypothèses des théorèmes, éventuellement énoncer des résultats intermédiaires, etc. Faire manifestement preuve de réticence à écrire son raisonnement au tableau a été systématiquement sanctionné.

- De même, malgré l'insistance du jury, certains candidats et candidates rechignent à écrire proprement les hypothèses des questions au tableau, et plus généralement tout ce qui ne relève pas de la formule mais fait quand même partie intégrante du langage mathématique : connecteurs logiques, quantificateurs, etc. Inutile de dire que c'est une très mauvaise idée. En premier lieu, cela permet, à tout moment, de retrouver l'énoncé précis du résultat auquel on souhaite aboutir, et d'isoler les hypothèses utiles à chaque étape du raisonnement. Ensuite, cela permet de réutiliser dans la suite de la planche les questions déjà traitées (ce qui est assez courant). Enfin, ne pas faire ce que demande le jury démontre soit une capacité de communication limitée, soit une témérité inattendue lors d'une épreuve orale. Notons que la gestion du tableau est une compétence évaluée, au moins indirectement, par le jury : des candidats et candidates se sont retrouvés bloqués au cours de la planche du fait d'avoir effacé une partie de leurs résultats, et ce malgré les protestations de l'interrogateur. D'autres ont perdu un temps précieux à réécrire plusieurs fois des raisonnements déjà effectués lors des questions précédentes mais effacés par la suite sans en garder de trace. Se forcer à présenter correctement son tableau, c'est aussi s'assurer d'avoir à tout moment la structure de l'exercice en tête.
- Certains candidats et candidates ne tiennent pas compte des pistes fournies par l'examinateur au cours de l'épreuve. Le but du jury n'est pas de lancer sur de fausses pistes, mais bien de guider dans la résolution d'exercices parfois difficiles. Ces pistes même si elles n'évoquent rien immédiatement au candidat ou à la candidate doivent néanmoins faire l'objet d'investigation.
- De manière similaire, la première question de l'exercice fournit, dans bon nombre de cas, une indications devant être utilisée dans la suite de l'exercice. Lorsqu'il est demandé de rappeler une formule de Taylor au début de l'exercice, il est fort probable que celle-ci intervienne dans la suite, et il est assez regrettable que certains candidats et candidates ne songent alors pas à exploiter cette première question. A contrario, certains cherchent par tous les moyens à traiter la question 2 à l'aide de la question 1. Les questions ne sont pas nécessairement imbriquées les unes dans les autres. Il est davantage attendu d'adopter une posture de recherche active en réfléchissant au problème posé plutôt que d'essayer de faire intervenir artificiellement un résultat préliminaire.
- À tout moment de l'oral le jury peut être amené à poser des questions très simples autour du cours ou de cas particuliers. C'est tout à fait normal et cela ne présage en rien de la réussite de la personne interrogée, mais vise à évaluer de manière la plus complète possible sa maîtrise. Cela peut aussi constituer une indication (à demi) cachée pour la résolution de l'exercice, que ce soit par l'utilisation directe de la propriété demandée ou bien de son idée de preuve. Certains candidats et candidates ont été mis en défaut sur ces questions. Il est crucial de rappeler que le cours doit être maîtrisé.
- Le jury apprécie grandement les candidats et candidates qui, lorsqu'ils sèchent sur une question, proposent d'eux même de considérer des cas simples (le plus souvent il s'agit de traiter le cas $n = 2$ avant de s'attaquer à des n quelconques, que n soit une dimension, un cardinal ou un paramètre). Il est assez rare que les personnes interrogées osent simplifier un énoncé difficile, or quand elles le font l'initiative est souvent couronnée de succès et débouche sur une preuve générale. Lorsqu'une telle simplification devient triviale et ne permet pas d'avancer sur le cas général, le jury apprécie aussi que les candidats et candidates s'en rendent compte d'eux-mêmes.
- Au contraire, certains candidats et candidates essaient de résoudre la question posée en cherchant exhaustivement une astuce qui permettrait une solution immédiate et lucrative

en termes de note finale. Comme nous l'avons déjà dit, nous ne cherchons pas à évaluer de telles astuces. Les exercices proposés ne sont pour ainsi dire jamais "à astuce", mais demandent une certaine imprégnation de l'énoncé et des notions mises en jeu (à l'instar de presque tous les problèmes de recherche). Ils nous permettent de tester des qualités qui feront des futurs normaliens et normaliennes de bons enseignants et de bonnes chercheuses : compréhension profonde des objets manipulés (qui constitue un prérequis aux compétences pédagogiques) et capacités d'adaptation face à un problème nouveau. Les rares exercices présentant une "astuce" ont fait l'objet d'indications claires et précises dans l'énoncé ou bien directement par l'examinateur le cas échéant.

- Les exercices font parfois intervenir des objets ne tombant pas directement dans le programme (par exemple, des EDO non linéaires). Dans ce cas, le jury est bien conscient de ce fait, et aucune connaissance hors programme n'est attendue. Le but de telles questions est de voir comment l'aspirant normalien réagit face à la nouveauté ou à un cadre original. Les énoncés sont conçus pour pouvoir être résolus grâce à une réflexion ne faisant intervenir que des notions connues. De même il est rappelé qu'un étalage de connaissance hors-programme ne fait gagner aucun point supplémentaire. Les quelques candidats et candidates s'y étant risqué ont au contraire mis en avant une difficulté à se concentrer sur une problématique donnée et à identifier de façon précise les connaissances nécessaires à la résolution de l'exercice, voire se sont enfermés dans des résultats hors-programmes dont ils avaient connaissance mais qui orientait dans une mauvaise direction pour la résolution de l'exercice.
- Le niveau des exercices proposés étant relativement hétérogène, il est compensé par la quantité d'indications fournies par le jury. Les candidats et candidates ne doivent donc pas s'inquiéter si l'examinateur a tendance à leur en fournir régulièrement : cela peut simplement signifier que l'exercice proposé est difficile et nécessite un soutien régulier du jury pour y progresser dans les 45 minutes imparties. Il est par ailleurs important de noter que les exercices ne sont pas nécessairement pensés pour pouvoir être terminés dans le temps imparti, et de très rares personnes sont parvenues à bout de leur planche.

Exemples d'exercices donnés

Pour illustrer quelques-uns de ces points, voici des exemples d'exercices proposés lors des épreuves orales. Pour certains exercices, seules les premières questions étaient données au début de l'oral.

Exercice 1. *On considère $A, M \in S_n(\mathbb{R})$ et un paramètre $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Que peut-on dire des valeurs propres et vecteurs propres de $A + tM$? Des valeurs propres et vecteurs propres à gauche, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Y \in \mathbb{C}^n$ tels que ${}^tY(A + tM) = \lambda(A + tM)$?*
2. *On suppose que pour tout t au voisinage de 0, $A + tM$ est à valeurs propres simples $(\lambda_k(t))_{1\leq k\leq n}$, et que ces valeurs propres et leurs vecteurs propres normalisés $X_k(t)$ correspondants (tels que ${}^tX_k(t)X_k(t) = 1$) sont dérivables. Montrer qu'au voisinage de 0,*
$$\lambda_k'(t) = {}^tX_k(t)MX_k(t).$$
3. *Sous les mêmes hypothèses, montrer que*
$$X_k'(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{{}^tX_k(t)MX_j(t)}{\lambda_k(t) - \lambda_j(t)} X_j(t).$$

4. *Si A est à valeurs propres simples, expliquer pourquoi on peut énumérer les valeurs propres et vecteurs propres de $A + tM$ de façon continue en t au voisinage de 0.*

Commentaires Les deux premières questions ont été globalement bien traitées. Pour la deuxième question, de nombreux candidats ont pensé à dériver l'équation aux vecteurs propres $(A + tM)X_k(t) = \lambda_k(t)X_k(t)$ pour obtenir

$$(A + tM - \lambda_k(t)\,\mathrm{Id})X_k'(t) = (\lambda_k'(t) - M)X_k(t) \tag{1}$$

et en déduire des informations sur λ_k'.

La troisième question a été discriminante. La principale difficulté consistait à justifier que, même s'il est impossible d'inverser l'opérateur $(A + tM - \lambda_k(t)\,\mathrm{Id})$ en toute généralité, le second membre de (1) est bien dans l'image de cet opérateur. Pour cela, il était judicieux d'utiliser la base orthonormée adaptée $(X_k(t))_{1\leq k\leq n}$.

La dernière question d'ouverture permettait aux candidats et candidates de prendre du recul sur les notions au programme pour choisir une approche fructueuse, plusieurs réponses étaient possibles.

Exercice 2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$*

1. (a) *Montrer que* $\mathrm{tr}\ A^k = 0$ *pour tout $k \geqslant 1$ si, et seulement si, A est nilpotente.*
   (b) *Supposons que $A(AB - BA) = 0$, montrer que $AB - BA$ est nilpotente.*
2. *Supposons désormais que A est nilpotente et qu'elle commute avec $AB - BA$.*
   (a) *Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.*
   (b) *Montrer que BA stabilise les noyaux itérés* $\mathrm{Ker}(A^k)$.
   (c) *Montrer que BA est nilpotente.*

Commentaires La première question est une caractérisation classique des matrices nilpotentes. L'entame d'un exercice est souvent une entrée qui permet de se raccrocher au cours et de demander au candidat de nombreuses justifications concernant les outils et résultats utilisés. Il s'agissait ici de trigonaliser A dans $M_n(\mathbb{C})$ et traduire la condition $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout j en un système d'équations $\sum_j m_j\lambda_i^k = 0$ sur les valeurs propres λ_j supposées distinctes (où les m_j sont leurs multiplicités), que l'on identifie comme un système de Vandermonde. Il est étonnant de constater que les candidats sont tous très à l'aise pour reconnaître un déterminant de Vandermonde (qui n'est pourtant pas au programme et que le jury aurait pu naturellement aider à calculer) et conclure concernant les valeurs propres, mais que rares ont été ceux capables de justifier proprement son calcul ou de conclure à partir du fait que les valeurs propres sont toutes nulles. Cette première question proche du cours, pour ainsi dire d'échauffement, a ainsi déjà été discriminante.

Une bonne partie de l'exercice est alors essentiellement un jeu formel sur des règles de réduction et de calcul. Certains candidat montrent peu de recul face aux calculs demandés, ne donnant que peu de sens aux hypothèses et oubliant souvent le type de résultat recherché. Ainsi, l'hypothèse de la question 1. (b) se récrit $ABA = A^2B$, ce qui permet de "faire passer les A à gauche des B" dans les calculs, tant que B est entouré de A's. On obtient donc que $ABA^k = A^{k+1}B$ et que $(AB)^k = A^kB^k$, ce qui permet de conclure assez aisément par invariance de la trace par permutation circulaire. Cette dernière propriété, bien intégrée dans les esprits et dans les cours, a souvent été fastidieuse à justifier.

La dernière partie de l'exercice, constituée des questions 2. (b) et (c), qui revenait aux endomorphismes itérés et utilisait des arguments plus géométriques pour conclure, n'a presque pas été abordée.

Exercice 3. *Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, la première suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et la seconde la loi géométrique « décalée » de paramètre $p \in]0,1[$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^k p$ pour tout $k \in \mathbf{N}$). Soit A la matrice aléatoire*

$$\begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

1. *Question préliminaire : montrer que*

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k).$$

2. *Quelle est l'espérance de la variable aléatoire* $\mathrm{rg}(A)$ *?*
3. *Quelle est la probabilité que A appartienne à* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ *?*
4. *Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?*
5. *On ajoute un coefficient $X - Y$ en bas à gauche de la matrice. Quelle est la probabilité que cette matrice $\widetilde{A}$ soit orthogonale ? Plus généralement, si on ajoute un coefficient Z (variable aléatoire réelle) en bas à gauche, la matrice obtenue peut elle avoir une probabilité strictement positive d'être orthogonale ?*
6. *Soit $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Quelle est la probabilité que la matrice $M := (X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit orthogonale ?*

Commentaires La question préliminaire n'a pas toujours donné lieu à des réponses rapides et précises, ce que le jury met principalement sur le compte du stress d'un début d'oral. La deuxième question a été bien traitée par la plupart des candidats, qui n'étaient pas déstabilisés par le mélange de probabilités et d'algèbre linéaire. Cette observation recoupe notre commentaire général sur les bons réflexes acquis par les candidats et les candidates en probabilités. Dans ce cas précis, il s'agissait d'observer que la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$ ne pouvait prendre que 3 valeurs possibles et donc qu'on pouvait facilement déterminer la loi de cette variable aléatoire pour en déduire l'espérance par la formule

$$\mathbb{E}(\mathrm{rg}(A)) = \sum_{i=0}^{2} i\mathbb{P}(\mathrm{rg}(A) = i).$$

La question 3 a également été bien traitée, les candidats connaissant généralement la condition sur le déterminant pour qu'une matrice admette un inverse également à coefficients entiers. Le jury n'hésitait pas à demander de redémontrer ce fait, ce qui a perturbé certains candidats peu sûrs d'eux sur la formule de l'inverse d'une matrice 2×2. Le jury conseille de ne pas hésiter à la retrouver en direct au tableau en résolvant par exemple un système plutôt qu'en cherchant laborieusement à se souvenir de la formule de la comatrice. Même si la connaissance de la formule est un attendu au programme, le jury apprécie la capacité à retrouver des résultats de cours efficacement et rapidement lorsque la mémoire fait défaut. Comme la probabilité que la matrice appartienne à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ avait été déterminée à la question précédente, le jury appréciait particulièrement que les candidats pensent d'eux mêmes à comparer les deux probabilités obtenues. Des discussions sur le comportement asymptotique des probabilités obtenues pouvaient aussi être ajoutées par le jury selon le déroulement de l'oral. La question 4 a donné lieu à quelques difficultés pour justifier rigoureusement l'égalité entre évènements

$$\{A \text{ est diagonalisable}\} = \{X \neq Y\} \cup \{X = Y \text{ et } X + Y = 0\},$$

Selon l'approche choisie à la question 5, la solution pouvait apparaître plus ou moins rapidement. Certaines approches conduisaient à un système non-linéaire, dont il n'était guère difficile de voir qu'il n'avait pas de solution en choisissant judicieusement des opérations entre les lignes. La dernière question n'a pas toujours été abordée, mais les candidates et candidats parvenant à ce point réussissaient bien cette question.

À la surprise du jury, ce ne sont pas les probabilités qui ont été discriminantes dans cet exercice, mais plutôt l'efficacité et la propreté des calculs ainsi la maîtrise de faits élémentaires sur la réduction des matrices 2×2.