Banques MP/MPI/INFO Inter-ENS – session 2024
Rapport sur l'épreuve orale de mathématiques ULSR

Le jury était constitué de Paul Gassiat, Malo Jézéquel, Benoît Loisel, Marco Maculan, Gabriel Pallier, Rémi Tesson et Carl Tipler.

Cette épreuve est commune aux écoles normales supérieures de Paris, Lyon, Paris-Saclay et Rennes. Le poids relatif de l'épreuve, c'est-à-dire son coefficient divisé par la somme totale des coefficients (écrits et oraux) pour chaque concours, est présenté dans le tableau ci-dessous. Abréviations : U = Ulm, L = Lyon, S = Paris-Saclay, R= Rennes.

Concours MP				**Concours Info**			**Concours MPI**		
U	**L**	**S**	**R**	**U**	**L**	**S**	**U**	**L**	**S**
13,9%	10,8%	15,4%	15,4%	13,3%	11,3%	13,2%	13,3%	9,9%	13,2%

Nous avons interrogé 444 candidats. Les notes s'étalent de 8 à 20 ; la moyenne est 13,20 ; l'écart type est 2,23 ; la médiane est 13. Une répartition plus précise des notes est donnée ci-dessous.

Note sur 20	**effectif en %**	**cumul en %**
$\leqslant 9$	2,3	2,3
10	8,6	10,8
11	12,7	23,4
12	17,8	41,2
13	17,4	58,6
14	14,0	72,5
15	11,3	83,8
16	7,9	91,7
17	4,5	96,2
$\geqslant 18$	3,8	100

1 Déroulement et nature de l'épreuve

1.1 Modalités

L'épreuve a une durée de 45 minutes, sans préparation. Un tableau est à la disposition du candidat. En début d'oral, l'énoncé est dicté au candidat. Rappelons qu'il est très important de noter la totalité de l'énoncé au tableau. Les énoncés comportaient très souvent plusieurs questions, qui étaient données progressivement à la candidate ; dans ce cas, le but de l'exercice était parfois, mais non systématiquement, annoncé dès le début.

Il était possible d'assister aux oraux en tant que spectatrice, en s'enregistrant en avance sur une plateforme dédiée. Dans ce cas, il convient de demander à la candidate son accord avant d'assister à son oral ; la prise de notes est interdite et il est impératif de garder la plus grande discrétion. Il peut être profitable d'assister à plusieurs oraux pour apprécier la diversité des prestations.

Les exercices ont été donnés la plupart du temps à 2 reprises pour 4 candidats en parallèle, soit 8 fois au total pour un exercice donné.

1.2 Début de l'oral

Assez souvent, la première question portait sur des notions relativement proches du cours ou avait pour vocation de permettre au candidat d'appréhender les questions suivantes dans de bonnes dispositions. C'est le cas notamment dans les exercices 1, 3, 6 et 7 que nous fournissons à titre d'illustration à la fin de ce rapport.

D'autres fois, les exercices débutaient par une question d'abord un peu moins familier, pour lesquelles une certaine initiative permettant des progrès graduels pouvait être requise : cette initiative pouvait consister à traiter des cas particuliers, ou à répondre à la question sous des hypothèses plus fortes. C'était le cas dans l'exercice 4 où l'on pouvait commencer par des λ_k particuliers.

1.3 Avancement dans l'oral ; second exercice éventuel

En début d'oral, l'examinateur intervient généralement peu. La plupart du temps, les interventions de l'examinateur devenaient de plus en plus fréquentes au cours de l'oral, selon la situation. En fin d'oral, il pouvait arriver que l'examinateur demande de résumer ce qui a été fait (en particulier quand il est beaucoup intervenu) et si le candidat a des idées de ce qu'il resterait à faire.

Éventuellement, un second exercice a pu être donné. Les seconds exercices sont plus courts. Les exercices 9 et 10 qui figurent en fin de ce rapport ont été posés comme second exercices.

1.4 Usage du tableau

Le tableau est le support de l'énoncé mais aussi des résultats intermédiaires et parfois des pistes. Il est judicieux de la part des candidats de demander avant d'effacer, en particulier parce que des résultats pourront resservir, mais aussi pour permettre à l'examinateur de garder en vue pendant un temps raisonnable l'intégralité des arguments développés. Il est parfois préférable de barrer le résultat d'un calcul incorrect plutôt que de l'effacer trop vite.

2 Critères d'évaluation

2.1 Maîtrise de l'ensemble du programme

Toutes les notions figurant au programme sont susceptibles d'être évaluées. Ne pas connaître un point important du programme empêche de réussir l'oral. Pour certains exercices, connaître au moins une preuve des résultats centraux du programme (par exemple le théorème spectral ou le théorème de Bolzano–Weierstrass, voir à ce sujet l'exercice 6) était d'une grande aide, car la stratégie pouvait être reproduite pour résoudre l'exercice. Des notions remontant même au lycée pouvaient être mobilisées (la résolution de l'équation du second degré, voir à ce sujet l'exercice 7). Dans une optique de préparation à l'épreuve, il est bien plus profitable de maîtriser l'ensemble du programme et d'avoir à l'esprit un petit nombre d'exercices d'application directe (voir le paragraphe suivant), ce qui est déjà substantiel, que de tenter de s'appuyer sur des annales, bien trop étendues.

Il existe un certain nombre de résultats qui s'énoncent intégralement dans les termes du programme et en constituent des applications directes, de sorte que nous avons pu considérer que ces résultats font partie de la culture commune de l'ensemble des candidats au concours. Ceux-ci n'étaient jamais demandés tels quels, mais garder leur fonctionnement à l'esprit pouvait dans une certaine mesure être utile. Un exemple de ce type est le fait que les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont denses ou monogènes, résultat accessible en première année ; la structure de la preuve pouvait aider à résoudre la question 2 de l'exercice 2.

Les candidats nous ont semblé mieux préparés sur certaines parties du programme que sur d'autres ; nous détaillerons quelque peu en section 3.

2.2 Quelques mots sur le hors-programme

Les énoncés peuvent être résolus strictement dans le cadre du programme. Il est arrivé que des notions hors programme soient invoquées par des candidats . Ces derniers doivent pouvoir les démontrer à l'aide des outils au programme. Par ailleurs une telle initiative n'est pas souhaitable quand elle est manifestement superflue, auquel cas l'examinateur pouvait la décourager en demandant de se replacer dans le cadre du programme. Dans les rares cas où cela s'est présenté, nous devons admettre que les candidats maîtrisaient la preuve des outils hors programme qu'ils utilisaient.

2.3 Le recul et la maîtrise technique

Une qualité primordiale est de savoir jauger la difficulté d'un énoncé. Par exemple, quand on procède par double implication ou double inclusion, il est très fréquent que l'une des deux directions soit plus facile ; l'identifier et la traiter pour se concentrer sur les difficultés réelles est un point positif. Dans le même registre, il est très important de garder en vue l'ensemble des hypothèses données par l'énoncé. Des candidats ont été débloqués par le simple rappel par l'examinateur d'une hypothèse, sans laquelle il était complètement sans espoir de conclure un raisonnement ; c'est dommage.

Bien souvent, le recul ne peut être évalué qu'à condition que la maîtrise technique soit suffisante. Les énoncés sont généralement conçus pour que les calculs n'occupent pas la plus grande partie de l'oral, ce qui suppose une maîtrise technique minimale.

2.4 Autonomie

Face à une question identifiée comme difficile, il est apprécié que la candidate propose des pistes. Celles-ci doivent cependant être à la fois assez spécifiques, constructives, et réalistes. Par exemple, proposer de raisonner par récurrence est peu spécifique ; proposer des changements de variables au hasard est peu constructif. Il n'est pas non plus attendu que le candidat propose un catalogue de techniques, en s'attendant à ce que l'une d'entre elles soit validée par l'examinateur. Nous rappelons que les examinateurs sont conscients de la difficulté de certaines questions surtout vu le temps limité de l'épreuve, et dans cette situation, c'est la capacité à mener la discussion ou à réagir aux indications qui est évaluée plus que la résolution complète autonome.

2.5 Efficacité et avancement

Il peut arriver qu'un exercice soit terminé, auquel cas un second exercice est donné. C'est toujours bon signe ; cependant, certains exercices sont très longs et il n'est pas nécessaire dans ce cas de les terminer pour avoir une excellente note ; par ailleurs, l'avancement dans l'exercice n'est qu'un critère parmi d'autres. Le jury attache davantage d'importance à la profondeur des idées et techniques spécifiques proposées et appliquées par la candidate pour avancer dans l'exercice, plutôt qu'à la proportion de l'exercice qu'elle a effectivement traité.

Toutefois, un certain dynamisme est apprécié, en particulier, quand une stratégie de résolution est identifiée, il est attendu qu'elle soit mise en oeuvre de manière efficace. La capacité à conclure ou détailler de manière efficace un argument une fois que toutes les idées sont là est évaluée. À ce propos, il est intéressant pour le candidat d'avoir conscience que tous les arguments ne méritent pas le même niveau de détail : il n'est pas la peine de rédiger au tableau une récurrence immédiate, ni de répéter un argument semblable plusieurs fois. Une fois qu'un candidat a établi qu'il sait gérer des détails techniques, il peut se permettre d'aller plus vite

2.6 Rigueur, correction, présentation des idées

Un candidat qui avance une assertion fausse mais se reprend rapidement n'est pas pénalisé. L'examinateur peut demander au candidat de préciser son propos lorsque les hypothèses ou conditions d'application ne sont pas clairement mises en avant par le candidat.

Il est arrivé à plusieurs reprises que des candidats soient significativement aidés par la modeste suggestion de faire un dessin, ceci bien au-delà des véritables questions de géométrie, très rares au demeurant. Nous encourageons les candidats à ne pas se censurer dans l'usage du tableau.

3 Remarques spécifiques

Le programme d'algèbre linéaire et de réduction des endomorphismes était globalement bien maîtrisé. Toutefois, si les réflexes sont bons, rappelons que les résultats au programme ne constituent pas simplement une liste, et sont liés entre eux. Par exemple, le lemme de décomposition des noyaux, bien que connu, n'est pas assez systématiquement invoqué en première intention par des candidats qui semblent avoir surtout retenu ses conséquences pratiques.

Le manque d'aisance avec certaines compétences techniques du programme d'analyse a parfois pu faire perdre du temps à certains candidats. On s'attend par exemple à ce que les candidats soient capables d'appliquer efficacement la méthode de variation de la constante.

Enfin, les candidats ont semblé moins préparés face aux exercices de probabilité. Le cours était globalement bien connu, mais les candidats n'avaient pas toujours les bons réflexes. Par exemple, face à une espérance, le réflexe premier a souvent été de la réécrire comme une somme en utilisant la formule de transfert, alors que dans de nombreux cas cela n'apporte rien et qu'il est plus judicieux d'essayer de travailler sur les variables aléatoires qui sont en jeu.

4 Exemples d'exercices

Dans tous les énoncés des exercices ci-dessous, ne figurent que les questions qui ont été effectivement posées à l'oral.

Exercice 1. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.

1. Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.
2. À tour de rôle, Alice et Barbara choisissent un élément du groupe $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, différent des éléments précédemment choisis. Alice commence. Une joueuse a perdu quand l'élément qu'elle choisit, avec tous les précédents, engendre tout le groupe G. Selon

la valeur de n, il existe une joueuse qui peut gagner en jouant de manière optimale ; laquelle ?

3. Même question que la question 2 avec le groupe symétrique S_n à la place de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Commentaires : La question 1 a été traitée par tous les candidats, mais avec une efficacité très variable. On pouvait commencer par se rappeler que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont monogènes.

La question 2 a donné matière à réfléchir. La forme de la question n'a pas semblé destabiliser les candidats ; au besoin, pour dissiper toute ambiguïté il a été répété qu'Alice et Barbara jouent de la meilleure manière possible en ayant une connaissance parfaite du jeu. Il s'agissait de comprendre qu'un rôle particulier est joué par certains sous-groupes H de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contenant H est égal à H ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et plus précisément, par l'(im)parité de leur cardinal ; c'était la classe de n modulo 4 qui importait.

La question 3 n'a été que très peu abordée.

L'énoncé contenait des questions supplémentaires qui n'ont pas été abordées, dans lesquelles on posait l'analogue des questions 2 et 3 pour d'autres groupes, notamment le groupe des isométries vectorielles d'un n-gone régulier dans le plan (la parité de n jouant un rôle important).

Exercice 2. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls. On suppose que l'ensemble $S = \{s_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est stable par multiplication.

1. Montrer qu'il existe $b > 1$ tel que $n \leqslant s_n \leqslant b^n$ pour tout n.
2. Montrer que $(\frac{s_{n+1}}{s_n})$ converge vers une limite finie.

Commentaires : La première question était une question de mise en route et il était bon de s'en apercevoir et de ne pas y perdre trop de temps. On pouvait noter que les deux bornes fournissent deux exemples, $s_n = n$ et $s_n = b^n$, qui peuvent servir de suites tests dans la suite.

La question 2 s'est avérée difficile. Après passage au logarithme, on pouvait constater que l'image de la suite $(\ln s_n)$ était contenue dans un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pas trop grand à construire, ce qui fournissait la disjonction de cas adéquate pour mener la preuve et conclure. Des candidats ont fait le lien avec la structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$ denses ou monogènes mais aucune n'est arrivée au bout.

Plusieurs candidats tentèrent avec une vigueur excessive d'appliquer la question 1 dans la question 2. C'était inutile. Elle aurait servi dans une question ultérieure qui n'a pas été posée, où l'on proposait d'étudier la vitesse de convergence des quotients dans un cas particulier.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3.

1. On se donne un plan P de dimension 2 dans E et S l'ensemble des droites vectorielles de E contenues dans P. Montrer que

$$\forall g \in \mathrm{GL}(E),\ g(S) \cap S \neq \emptyset. \tag{$\cap$}$$

Soit p un nombre premier. On suppose dorénavant que $E = \mathbb{F}_p^3$. On se donne un ensemble S de droites vectorielles dans E tel que $(\cap)$ est vraie.

2. Montrer que $\mathrm{Card}(S) \geqslant p + 1$; peut-on avoir égalité ?
3. On suppose que $p = 2$. Caractériser le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Commentaires : Dans la première question, il était nécessaire de la part du candidat de bien se saisir de l'énoncé, et du fait implicite que g envoie droite sur droite (c'est pourquoi on est en droit d'écrire $g(S)$). Ceci a été correctement appréhendé.

Dans la question 2, outre le cas d'égalité (où il fallait saisir le lien avec la question 1), les candidats devaient consentir à renoncer aux techniques purement linéaires. Une manière de résoudre cette question est d'utiliser la méthode probabiliste, ou tout du moins des arguments combinatoires. Des candidats savaient bien dénombrer $\mathrm{GL}(E)$ mais pas les droites vectorielles de E, ce qui était plus utile ici.

La question 3 a été posée, mais aucun candidat ne l'a terminée.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $u = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des v.a. indépendantes de loi de Rademacher (i.e. $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$), on note

$$\mathcal{N}(u) = \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k\right\|\right].$$

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $[-1, 1]$. Montrer que

$$\mathcal{N}(\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n) \leq \mathcal{N}(u_1, \dots, u_n).$$

2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. réelles indépendantes symétriques (càd t.q. X_i et $-X_i$ aient même loi), à valeurs dans $[-1, 1]$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k u_k\right\|\right] \leq \mathcal{N}(u_1, \dots, u_n).$$

Commentaires : Pour la question 1., on suggère de commencer par traiter des cas particuliers de λ, par exemple :

(i) $\lambda_k \in \{\pm 1\}$ (on en déduit qu'on peut se ramener à $\lambda_k \in [0, 1]$)

(ii) $\lambda_k \in \{0, 1\}$ (on pourra chercher à écrire $\sum_k \lambda_k \varepsilon_k u_k$ comme somme de deux termes de même loi que $\sum_k \varepsilon_k u_k$)

(iii) λ_k rationnel dyadique

Pour la question 2., on pourra considérer $X'_k = X_k \varepsilon_k$, où les ε_k sont des Rademacher i.i.d. indépendantes des X_k.

Exercice 5. Soient X_n, $n \in \mathbb{Z}$ des v.a. indépdendantes, suivant la loi de Rademacher, i.e. $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$.

Etant donnée une v.a. N à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{Z}$, on note X_{N+n} la v.a. $\omega \mapsto X_{N(\omega)+n}(\omega)$.

1. Montrer qu'il existe une v.a. N à valeur dans $\mathbb{Z}$ telle que $X_N = 1$ p.s., et les X_{N+n}, $n \geq 1$ sont des Rademacher indépendantes.
2. Même question, mais on demande maintenant que la deuxième propriété soit satisfaite pour les X_{N+n}, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Commentaires : La question 1 est relativement facile, une fois l'énoncé compris, les candidates ont en général rapidement posé un N qui convient. Ensuite, il y a un peu de travail pour le démontrer, qui nécessite d'être à l'aise avec les manipulations probabilistes de base.

La question 2 est en revanche très difficile (surtout étant donné le faible temps imparti), et on ne s'attendait pas à ce qu'elle soit résolue entièrement par le candidat. On a pu par exemple faire vérifier à la candidate que le N choisi à la question 1 ne marche pas, puis lui faire suggérer des alternatives, puis enfin lui faire vérifier que l'on pouvait prendre (dans le cas où $X_0 \neq 1$)

$$N = \inf \left\{ n \geq 1, \ \sum_{k=0}^{n} X_k = 0 \right\}.$$

Aucun candidat n'est arrivé au bout de l'exercice.

Exercice 6. On note ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées à valeurs réelles. On munit ℓ^∞ de la norme

$$\|(x_n)_{n\geq 0}\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|.$$

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite sommable (à valeurs réelles). Pour $(x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, on note $f((x_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$. Montrer que f définit une forme linéaire continue sur ℓ^∞ et calculer sa norme d'opérateur.

On veut montrer qu'il existe des formes linéaires sur ℓ^∞ qui ne sont pas de cette forme. Pour cela, on admet qu'il existe un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que :
— $\mathcal{F}$ ne contient pas d'ensemble fini ;
— si $A, B \in \mathcal{F}$ alors $A \cap B \in \mathcal{F}$;
— si $A \subseteq B$ et $A \in \mathcal{F}$ alors $B \in \mathcal{F}$;
— si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ alors A ou $\mathbb{N} \setminus A$ est dans $\mathcal{F}$.
On dit que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre non-principal.

2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ un élément de ℓ^∞. Montrer qu'il existe un unique $x_\infty \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $|x_n - x_\infty| \leq \epsilon$ pour tout $n \in A$.
3. Conclure.
4. Montrer que l'ensemble c_0 des suites réelles qui tendent vers 0 est un sous-espace fermé de ℓ^∞ et que les formes linéaires continues sur c_0 (muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$) sont toutes de la forme donnée dans la question 1.

Commentaires : La première question permet de vérifier que le candidat est à l'aise avec la notion de forme linéaire continue et de norme d'opérateur. Dans la deuxième question, il est intéressant de remarquer la similitude entre la propriété qui doit être vérifiée par x_∞ et la notion de limite d'une suite : on en déduit rapidement une preuve de l'unicité. Pour l'existence, connaître la preuve de Bolzano–Weierstrass par dichotomie aide à trouver une solution.

Exercice 7. On pose $\mathbb{A}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques, i.e. des fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. On munit $\mathbb{A}$ de deux lois de composition interne :

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

et

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d}).$$

1. Montrer que $(\mathbb{A}, +, *)$ est un anneau commutatif intégre.
2. Préciser $\mathbb{A}^*$.
3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{A}^3$. On suppose que a et $b^{*2} - 4a * c$ sont inversibles. Résoudre dans $\mathbb{A}$ l'équation $a * X^{*2} + b * X + c = 0$.

Commentaires : La première question permettait de vérifier que la notion d'anneau était bien connue des candidats. La preuve de l'intégrité de l'anneau nécessitait une rédaction détaillée.

Il était judicieux de procéder par analyse synthèse pour la deuxième question.

La dernière question pouvait se résoudre par analogie avec la résolution des équations algébriques du second ordre sur le corps des complexes.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B).$$

1. Quelle(s) valeur(s) peut prendre $\Phi(0)$? $\Phi(I_n)$?
2. Montrer que $\Phi(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   Indication : on pourra commencer par calculer $\Phi(A)$ lorsque A est une matrice de rang $r < n$.
3. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 s'écrit comme un produit d'involutions, c'est-à-dire de matrices B_i telles que $B_i^2 = I_n$.
   Indication : On pourra considérer, lorsque cela existe, un élément $x \in \mathbb{R}^n$ tel que x et $f(x)$ ne sont pas colinéaires et considérer l'involution qui fixe un supplémentaire de $x - f(x)$ contenant $x + f(x)$.
4. Montrer que si $\det(A) = 1$, alors $\Phi(A) = 1$.
   Indication : on pourra remarquer que Φ est une fonction centrale, c'est-à-dire constante sur les classes de similitudes.
5. En déduire qu'il existe un unique endomorphisme de groupes $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tel que $\Phi = \varphi \circ \det$.

Remarque : on peut généraliser ce résultat sur tout corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

Commentaires : Les deux premières questions ne présentaient pas de difficultés majeures. Une attention particulière est portée sur la rigueur du raisonnement.

La troisième question est centrale dans cet exercice. Il est judicieux de chercher à construire le produit par récurrence sur la dimension, en prenant soin de bien choisir un hyperplan. Elle requiert une certaine technicité en algèbre linéaire. Adopter une approche géométrique peut aider.

Les questions 4 et 5 encouragent à bien saisir les propriétés de l'application Φ afin de conclure.

Exercice 9. On note $\mathcal{N}$ l'ensembles des normes sur $\mathbb{R}^n$ et Φ l'application de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ qui à une norme associe sa boule unité. L'application Φ est-elle injective ? surjective ? si elle n'est pas surjective quelle est son image ?

Exercice 10. Soit $m \geq 1$ un entier. Soient $z_1, \dots, z_m$ des nombres complexes de module 1 distincts et $a_1, \dots, a_m$ des nombres complexes. On suppose que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k z_k^n = 0.$$

Montrer que $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Commentaires : Ces deux derniers exercices ont été posés en fin de planche après la résolution d'un premier exercice. Ils sont potentiellement plus courts que la plupart des exercices posés en premier, mais nécessitent une certaine autonomie de la part de la candidate.