Composition de Mathématiques – B, Filières MP, MPI (X)

1 Présentation du sujet

Le sujet de l'épreuve de Mathématiques B de l'année 2024 porte sur les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients complexes et périodiques. Fixons un entier naturel $n \geq 2$ et un réel $T > 0$. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace de matrices complexes de taille $n \times n$, et

$$A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & A(t) \end{array}$$

une application continue et T-périodique. On considère le système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{1}$$

où $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$. L'objectif du problème est de décrire la forme générale des solutions de (1) et l'existence de solutions périodiques. Ainsi, on démontre le théorème suivant :

Théoreme 1 (Floquet 1883)**.** *Il existe une application $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de classe $\mathscr{C}^1$ et T-périodique, et une matrice constante B telles que les solutions de $X'(t) = A(t)X(t)$ sont les fonctions de la forme*

$$X(t) = Q(t)\exp(tB)Y_0,$$

avec $Y_0 \in \mathbb{C}^n$.

On dit que A est *irréductible* si $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ stables par toutes les matrices $A(t)$. On déduit du théorème 1 le résultat suivant :

Théoreme 2 (Solutions périodiques)**.** *On suppose A irréductible. Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ admet alors une solution périodique non nulle si et seulement si la matrice B du théorème précédent admet une valeur propre de la forme $\frac{i2k\pi}{mT}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.*

Pour ce faire, le sujet balaye une large partie du programme. Bien entendu, la théorie des équations différentielles (le théorème de Cauchy-Lipschitz, la structure d'espace vectoriel des solutions du système, la technique du Wronskien etc.) sont à l'honneur, mais on y rencontre aussi le calcul différentiel (notions et calcul de différentielles, inégalité des accroissements finis, conditions nécessaires et suffisantes d'extremum d'une fonction), la réduction des endomorphismes (polynôme caractéristique, le théorème de Cayley-Hamilton), l'exponentielle matricielle et ses propriétés, et bien d'autres concepts du programme de MP-MPSI. Le sujet comprend des questions qui relèvent de la simple vérification (par exemple, les qq. 1a, 1b, 2, 8a), mais d'autres (cf. qq. 3, 4a, 6a, 8b, 11a, 11b, 15) demandent une hauteur de vue certaine et une prise d'initiative.

La première partie considère, de manière voilée, un cas particulier de l'équation (1) avec $n = 2$:

$$y'' + qy = 0 \tag{2}$$

avec $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un coefficient T-périodique. La question 4.a démontre le théorème 1 dans ce cas, tandis que la 4.b traite du théorème 2.

La deuxième partie propose une démonstration originale et plutôt élémentaire du théorème d'inversion locale (*TIL*) suivant

Théoreme 3 (TIL)**.** *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, $U \subset E$ ouvert, et $a \in U$. Soit $f : U \longrightarrow E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dont la différentielle $df(a)$ en a est l'identité Id_E de E.*

Alors, il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que l'application induite

$$f_{|V} : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est un homéomorphisme (i.e.*, une bijection continue dont la réciproque est continue également).*

Dans la preuve de ce résultat, la préimage d'un point $y_0 \in W$ est obtenue en minimisant la quantité $\|y_0 - f(x)\|^2$ par compacité et critère différentiel d'extremum. Observons aussi que $f_{|V}$ est en réalité un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, mais ce résultat n'est pas demandé par le sujet de l'épreuve.

Dans la troisième partie du sujet, on considère l'exponentielle matricielle $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ désigne le sous-ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On montre que cette application est surjective par un argument de connexité en utilisant le théorème 3. Pour $\mathbb{C}[A]$ désignant les polynômes en A, une astuce technique consiste à montrer d'abord que $\exp_A : \mathbb{C}[A] \longrightarrow \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective, pour toute matrice A. En effet, comme $\mathbb{C}[A]$ est commutatif, l'application $\exp_A$ vérifie que

$$\exp_A(M+N) = \exp_A(M)\exp_A(N).$$

Cette relation permet de montrer facilement le caractère $\mathscr{C}^1$ de l'application $\exp_A$ (voir question 11.b) et d'utiliser les structures de groupes (topologiques) sur $\mathbb{C}[A]$ et sur $\mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour manipuler les ouverts produits par le théorème 3 (voir question 11.b et 12) d'une manière convenable.

La quatrième partie du sujet commence par une démonstration du théorème 1 (question 16.d). Notons que l'existence de la matrice B utilise la surjectivité montrée à la partie III. Ensuite, on utilise la décomposition de Chevalley-Dunford, qui est donnée et admise avant la question 17, pour préciser la conclusion du théorème 1. On montre qu'il existe une base des solutions formée de fonctions périodiques multipliées par un facteur exponentiel et un polynôme. À la question 20, on utilise cette description pour démontrer le théorème 2. Le sujet se conclut par l'étude de la situation inhomogène (avec second membre) (cf. q. 21) et d'un exemple (cf. q. 22). Dans cet exemple $n = 2$ et les matrices $A(t)$ commutent deux à deux.

2 Conseils généraux pour les candidats.es

Les correcteurs soulignent qu'il est préférable de s'attacher à traiter correctement plusieurs questions consécutives et parmi elles des questions plus difficiles, plutôt que d'essayer de survoler toutes les parties et de tenter de "grappiller" des points sur les questions les plus faciles. Le barème est établi de sorte qu'une telle stratégie est forcément vouée à l'échec. À l'opposé, passer du temps pour, par exemple, réussir à traiter correctement les questions comme les qq. 3, 6a et 7b donnait la clé pour réussir les questions des parties suivantes et s'assurer un nombre de points suffisant pour atteindre la barre d'admissibilité. Il est en revanche tout à fait autorisé de "sauter" une question que l'on ne serait pas parvenu à résoudre, puis d'en utiliser le résultat plus tard. Il faut alors veiller à ne pas oublier de vérifier soigneusement toutes les hypothèses requises pour appliquer ces "boîtes noires".

Le soin apporté aux copies pose trop souvent problème. Nous rappelons aux candidates et candidats que l'usage d'un brouillon est indispensable afin de ne présenter sur sa copie que les étapes essentielles d'un raisonnement ou d'un calcul et de ne pas y faire figurer des arguments faux ou trop incomplets. Rajoutons que même les vérifications triviales (comme celles de la q. 8a) doivent être évoquées, même rapidement, par souci d'exhaustivité.

Enfin, la lisibilité des copies peut parfois poser un réel problème aux correcteurs. Nous rencontrons trop de copies remplies de ratures et/ou parfaitement illisibles du fait d'une graphie microscopique et/ou indéchiffrable. Dans les cas où malgré tous nos efforts de déchiffrage, certaines parties du texte restent incompréhensibles pour le correcteur, et dans le doute, les points ne sont pas attribués.

3 Indications sur le barème et statistiques générales

Les résultats de l'épreuve sont en accord avec les directives statistiques générales du concours, ce qui garantit l'influence respective convenable des différentes épreuves.

Voici les tableaux de statistiques pour les épreuves écrites Maths B des filières MP et MPI, respectivement.

	MP	MPI
Nombre de copies	2016	286

Statistiques des épreuves, nombres de copies par filière MP ou MPI.

	Toutes filières	MP	MPI
Toutes nat.	9,12	9,14	8,98
Française	9,56	9,66	9,09
Autres nat.	7,84	7,85	7,52

Statistiques des épreuves, moyennes par filière MP ou MPI.

	Toutes filières	MP	MPI
Toutes nat.	3,89	3,92	3,74
Française	3,77	3,79	3,65
Autres nat.	3,95	3,93	4,57

Statistiques des épreuves, écarts-types par filière MP ou MPI.

Notons que le nombre des candidats.es au concours de l'année 2024 s'est accru d'à peu près de 200 personnes par rapport à l'année précédente. Un bon nombre de copies de l'épreuve sont rédigées de manière convenable et montrent un savoir-faire et des connaissances solides.

C'est avec une certaine satisfaction que nous constatons le maintien du niveau des candidates et candidats (et, par conséquent, des résultats) à l'épreuve écrite de Mathématiques B par rapport aux années antérieures.

Enfin, le sujet de l'épreuve de cette année est peut-être plus original que ceux des années précédentes, mais nous ne trouvons pas qu'il était plus difficile.

4 Examen détaillé des questions

Ce qui suit n'est pas un corrigé de l'épreuve mais une liste de commentaires des correcteurs sur chaque question. Les statistiques données portent sur le total (sans distinction) des options MP et MPI.

4.1 Première Partie

Question 1.a C'est une application directe du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, ce qui en général a été bien vu par les candidats. Il fallait justifier : l'existence et l'unicité des fonctions y_1 et y_2, le fait que l'espace des solutions est un espace vectoriel complexe de dimension deux, le fait que $\{y_1, y_2\}$ en est une base. Voici un exemple d'une erreur récurrente : y_1 et y_2 ont des conditions initiales distinctes, donc elles sont linéairement indépendantes... (ou des variantes).

Taux de réussite - 84 %.

Question 1.b On montre que le Wronskien est constant, soit en le dérivant soit en appliquant le résultat du cours. Question très bien réussie.

Taux de réussite - 89 %.

Question 2 Il fallait faire le changement de variable $t \mapsto t+T$ et appliquer la q. 1.a ou l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. La très grande majorité des candidats traite bien cette question.

Taux de réussite - 92 %.

Question 3 Pour l'équivalence entre (a) et (b), il s'agissait d'interpréter la constante μ apparaissant dans l'équation comme une valeur propre de l'endomorphisme de l'espace $\mathcal{S}$ des solutions $Y(t) \longmapsto Y(t+T)$. La question 2 permettait de trouver la matrice de cet endomorphisme dans la base trouvée en q. 1.a. On pouvait s'en tirer par des calculs brutaux, qui en général aboutissent à l'équation voulue multipliée par une constante (du type $y(0)$), et pour conclure, il faut alors voir aussi ce qui se passe lorsque cette constante est nulle, ce qui malheureusement fait souvent tourner les calculs en rond. L'équivalence entre (a) et (c) était facile. La plupart des candidats établissent $(c) \implies (a)$ et ne font pas la réciproque car ils étaient partis sur l'idée de montrer $(a) \implies (b) \implies (c) \implies (a)$.

Taux de réussite - 16 %.

Question 4.a Les relations entre les coefficients du polynôme de la q. 3.b et ses racines donnent

$$\mu_1 \mu_2 = 1,$$

d'où $\mu_2 = e^{-\lambda T}$. On utilise ensuite la question 3. De nombreux candidats affirment, par la force de l'habitude des trinômes à coefficients réels sans doute, que μ_1 et μ_2 sont conjugués, ce qui n'est pas exact ici.

Il fallait conclure en établissant que les fonctions $t \mapsto e^{\lambda t}\omega_1(t)$ et $t \mapsto e^{-\lambda t}\omega_2(t)$ sont linéairement indépendantes, ce qui a souvent mené à des calculs fleuves et peu convaincants. L'interprétation de ces deux fonctions comme vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes d'un opérateur linéaire était plus efficace.

Taux de réussite - 37 %.

Question 4.b Encore les relations coefficients-racines du polynôme de la q. 3.b pour montrer que $\mu = \pm 1$. Ensuite il fallait remarquer que $y(t+T) = -y(t)$ implique que y est $2T$-périodique.

Taux de réussite - 26 %.

4.2 Deuxième Partie

Question 5.a C'est l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de plusieurs variables définie sur un convexe. Il convenait de refaire la démonstration par intégration de la différentielle le long du segment, ce que sait faire une bonne partie des candidats. On a vu bien sûr quelques tentatives d'utiliser une égalité des accroissement finis, ou des raisonnements à base de petits o.

Taux de réussite - 60 %.

Question 5.b C'est l'une des questions délicates du problème. L'astuce consistant à considérer $h(x) = f(x) - x$ et sa différentielle en a pour appliquer la question précédente n'a été vue que par des candidats exceptionnels. Le caractère $\mathscr{C}^1$ de f est ici nécessaire, la plupart des tentatives tentent d'utiliser seulement la différentiabilité en a, ce qui conduit a des additions de "petits o" illicites. Pourtant, un petit dessin permet de voir que l'on peut avoir x_1 et x_2 très proches (relativement à leur distance à a). Observons que l'hypothèse $\mathscr{C}^1$, nécessaire pour avoir le théorème d'inversion locale, n'est utilisée qu'ici dans la démonstration proposée.

Taux de réussite - 9 %.

Question 5.c Il fallait montrer ici que le noyau de la différentielle est réduit à $\{0\}$. Pour cela, on utilisait la question précédente et soit la définition de la dérivée directionnelle ou celle de la différentielle au point x. Une difficulté technique consistait à dilater le vecteur h du noyau (dont on veut prouver qu'il est nul) par t pour obtenir $\|th\| < r$ et pouvoir utiliser la q. 5.b. Il n'est pas licite de fixer h dans le noyau et ensuite de le "faire tendre" vers 0...

Taux de réussite - 15 %.

Question 6.a L'existence de x_0 se montre par compacité (*i.e.*, théorème des bornes atteintes), ce qui a été heureusement vu par une majorité de candidats. Certains gâchent ce bel effort en concluant par l'inclusion de la boule fermée dans la boule ouverte (oui, vu assez souvent...).

La difficulté est que les hypothèses n'interdisent pas au minimum d'être atteint au bord de la boule ouverte. Une manipulation assez banale des inégalités montre que si le minimum est atteint sur la sphère, il est aussi atteint en a et donc dans la boule ouverte. Beaucoup ayant manipulé correctement les inégalités ne parviennent pas à conclure parce qu'ils pensent que le point où le minimum est atteint est unique. Les inégalités larges se transforment alors parfois subrepticement en inégalités strictes dans une tentative dérisoire d'abuser le correcteur.

Taux de réussite - 37 %.

Question 6.b Certains candidats font l'hypothèse supplémentaire que la norme sur E est euclidienne, ce qui permet de différencier g et de dire que comme le minimum est atteint à l'intérieur de la boule, la différentielle de g doit s'annuler en ce point. Sous réserve d'un calcul correct, ceci menait à la conclusion voulue en utilisant la q. 5.c (d'ailleurs, la présence de l'exposant 2 sur la norme suggère assez fortement cette solution). Bien évidemment, ces candidats ont vu leur solution pleinement récompensée. Néanmoins, l'hypothèse était inutile car on pouvait obtenir la conclusion voulue à partir de la q. 5.c (*i.e.*, qui donnait l'injectivité de df_{x_0}, et donc sa surjectivité).

Taux de réussite - 11 %.

Question 7.a Question facile et bien traitée.

Taux de réussite - 72 %.

Question 7.b En utilisant les questions 5.b et 6.b, on montrait successivement que f est injective, surjective et que sa réciproque est lipschitzienne. Plusieurs candidats affirment que la continuité de la réciproque est tautologique. Il conviendrait d'avoir en tête un exemple de bijection continue qui ne soit pas un homéomorphisme.

Taux de réussite - 25 %.

4.3 Troisième Partie

Question 8.a Question facile et bien traitée.

Taux de réussite - 90 %.

Question 8.b Manifestement une question de cours, comme la suivante, pour de nombreux candidats. On peut utiliser le théorème de Cayley-Hamilton et multiplier l'identité obtenue par A^{-1}. On peut aussi montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{C}[A]$ de multiplication par A est injectif et donc surjectif. Certains candidats confondent le fait d'être un polynôme en A et avoir des coefficients qui sont des polynômes en les coefficients de A.

Taux de réussite - 31 %.

Question 9 Le caractère inversible de $\exp(P(A))$ s'obtient par $\exp(-P(A))$ ou par trigonalisation. Pour montrer que $\exp(P(A))$ est un polynôme en A, il suffit de l'écrire comme limite d'éléments de $\mathbb{C}[A]$ et d'utiliser le caractère fermé de $\mathbb{C}[A]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'erreur la plus courante a été de dire que grâce à l'existence d'un polynôme annulateur de degré n_0, A^n est dans l'espace engendré par I_n, $A, \cdots A^{n_0-1}$, pour tout n, ce qui est vrai mais inutile ici, et de s'en contenter sans mentionner l'argument de limite.

Taux de réussite - 34 %.

Question 10.a Question facile. Attention tout de même à ne pas diviser par 0.

Taux de réussite - 88 %.

Question 10.b Question délicate, traitée seulement par une petite fraction des candidats. Il fallait comprendre que les points de $\mathbb{C}[A]$ à éviter forment un ensemble fini. Pour cela on pouvait utiliser le déterminant ou la trigonalisation simultanée. Pour en déduire l'existence du chemin dans $\mathbb{C}[A]^*$ on utilise alors l'injectivité montrée à la q. 10.a. Géométriquement, nous avons construit un ensemble infini (paramétré par a) de chemins 2 à 2 disjoints entre M_1 et M_2. Seul un nombre fini de ces chemins ne sont exclus par la condition "être inclus dans $\mathbb{C}[A]^*$".

Taux de réussite - 12 %.

Question 10.c Traduction directe de la q. 10.b.

Taux de réussite - 72 %.

Question 11.a La question consiste à appliquer la q. 7.b, le point culminant de la partie II du sujet. Attention toutefois à vérifier soigneusement les hypothèses de cette dernière question.

Taux de réussite - 17 %.

Question 11.b Une autre question délicate traitée seulement par quelques rares candidats. La question 11.a fournit un voisinage de I_n dans $\exp(\mathbb{C}[A])$. En multipliant par $\exp(B)$ (opération qui est un homéomorphisme de $\exp(\mathbb{C}[A])$ dont l'homéomorphisme réciproque est la multiplication par $\exp(-B)$) on obtient un voisinage voulu de $\exp(B)$ dans $\exp(\mathbb{C}[A])$.

Taux de réussite - 7 %.

Question 12 Question encore plus délicate, traitée par encore moins de candidats. La même idée qu'à la question précédente permet de montrer que le complémentaire de $\exp(\mathbb{C}[A])$ dans $\mathbb{C}[A]$ est ouvert. Une erreur assez fréquente ici est de dire que si une suite $\exp(B_k)$ est bornée, alors la suite B_k aussi. C'est malheureusement faux comme on s'en convainc avec des matrices B_k dont les valeurs propres sont de la forme $2i\pi k$, mais cela permettait d'extraire une sous-suite convergente, etc.

Taux de réussite - 2 %.

Question 13 On a montré précédemment que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert et fermé dans l'ensemble connexe par arcs $\mathbb{C}[A]^*$. Il vient donc $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^*$. A la q. 13.a on utilise le caractère ouvert et fermé de $\exp(\mathbb{C}[A])$ pour construire une application continue à valeurs dans $\{0, 1\}$. A la q. 13.b on obtient une contradiction grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

Taux de réussite - la q. 13.a - 14 % ; la q. 13.b - 27 %.

Question 14 Il faut montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est inclus dans l'image de l'exponentielle. Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $A \in \mathbb{C}[A]^*$ et A appartient à l'image de exp par la question précédente.

Taux de réussite - 20 %.

4.4 Quatrième Partie

Question 15 Question analogue à la q. 3. Il fallait interpréter μ comme une valeur propre de l'endomorphisme $Y \mapsto Y(t+T)$ de l'espace des solutions. Une erreur commune consistait à utiliser la formule "exponentielle d'une primitive de $A(t)$". Cette formule n'est au programme que pour A constante et n'est vraie que si les matrices $A(t)$ commutent deux à deux.

Taux de réussite - 6 %.

Question 16.a La première partie nécessite l'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure que la famille $(Y_1(t), \ldots, Y_n(t))$ est libre pour chaque t fixé.

Taux de réussite - 45 %.

Question 16.b On pouvait dériver la quantité donnée par rapport à t. La difficulté technique était de différencier l'inversion des matrices. Une astuce, que très peu de candidats ont utilisé, consistait à prouver la relation équivalente

$$M(t+T)M(T)^{-1} = M(t)M(0)^{-1}.$$

En effet, les deux membres de cette dernière égalité sont deux solutions du même problème de Cauchy.

Taux de réussite - 12 %.

Question 16.c Utilisation directe de la q. 16.b et de la surjectivité de l'exponentielle.

Taux de réussite - 28 %.

Question 16.d On définit Q selon la proposition de la question et on vérifie les propriétés voulues.

Taux de réussite - 16 %.

Question 17.a Question immédiate. Taux de réussite - 19 %.

Question 17.b Manipulation de l'exponentielle de matrices. Rappelons que la relation

$$\exp(D+N) = \exp(D)\exp(N)$$

nécessite que D et N commutent.

Taux de réussite - 13 %.

Question 17.c Application immédiate de la q. 17.b.

Taux de réussite - 13 %.

Un nombre très faible de candidats a abordé les questions suivantes. On peut les ranger en deux catégories : les "grappilleurs" à la recherche de quelques points faciles et quelques candidats exceptionnels ayant traité l'essentiel des questions précédentes.

Question 18.a Un vecteur propre donne des conditions initiales et donc une solution. Celle-ci convient par application de la q. 16.d.

Taux de réussite - 4 %.

Question 18.b Ici, il s'agit de comprendre que dans la question précédente on a plus ou moins raisonné par équivalences.

Taux de réussite - 2 %.

Question 19 Utilisation de la densité et de la continuité. Taux de réussite - 1 %.

Question 20 Une application des trois dernières questions. La formulation ouverte de la question constitue une difficulté supplémentaire.

Taux de réussite - 0 %.

Question 21 Utilisation de la méthode de la variation de la constante. Taux de réussite - 0 %.

Question 22 Un exemple. Il convenait d'utiliser les nombres complexes pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre $n = 1$, explicitement résoluble. Ceci est possible car la matrice du système est une similitude pour tout t.

Taux de réussite - 0 %.