**Banques MP/MPI inter-ENS – Session 2024**

**Rapport relatif à l'épreuve écrite de Maths D**

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  Épreuve spécifique à l'ENS Ulm
- **Coefficients** (en pourcentage du total des points de chaque concours)
  Concours MP Option MP : 5,6%
  Concours MP Option MPI : 5,6%
- **Membres du jury :**
  Léonard Cadilhac (correcteur), Clément Chivet (correcteur), Javier Fresán (concepteur du sujet), Nataniel Marquis (correcteur), Omar Mohsen (correcteur).
- **Statistiques :**
  Sur les 2170 inscrits, 1465 ont composé.
  La moyenne est de 5,94 et l'écart-type de 3,53.

L'épreuve de mathématiques D 2024 proposait une démonstration d'un énoncé de transcendance sur les valeurs de la fonction exponentielle, suivant l'article *An Alternative Proof of the Lindemann–Weierstrass Theorem* de Beukers, Bézivin et Robba paru à l'American Mathematical Monthly en 1990. Il s'agit du théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass :

> Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des nombres algébriques distincts. Alors les nombres complexes $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_r}$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

Pour éviter de devoir faire une partie sur les nombres algébriques, le concepteur du sujet a choisi après de longues hésitations de se limiter au cas particulier où les $\alpha_i$ sont des nombres *rationnels* et l'énoncé affirme l'indépendance linéaire de $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_r}$ sur $\mathbf{Q}$. Ce cas contient déjà toutes les idées intéressantes de la démonstration, qui commence en fait par s'y ramener, mais ne permet pas hélas de déduire la transcendance de $\pi$.

Le sujet était particulièrement long, divisé en 7 parties relativement indépendantes entre elles qui comptabilisaient un total de 45 questions. Il n'était évidemment pas nécessaire de tout traiter pour avoir une excellente note. Voici un résumé des différentes parties :

– Le but des deux questions de la partie A était de se familiariser avec l'énoncé du théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass en en déduisant des conséquences frappantes comme l'irrationalité de $\log(a)$ pour tout nombre rationnel strictement positif $a \neq 1$ et la transcendance de $e^a$ pour tout nombre rationnel non nul $a$.

– La partie B contenait 8 questions sur les développements en série entière des fractions rationnelles à coefficients rationnels. Les quatre premières questions étaient de nature préparatoire. La question 7 visait à établir une propriété d'intégralité pour les coefficients de ces séries entières et la question 8 proposait un exemple montrant qu'elle ne les caractérise pas. Dans les questions 9 et 10, on s'intéressait aux fonctions rationnelles dont la primitive est aussi une fonction rationnelle.

– La partie C portait sur l'action des opérateurs différentiels sur les séries entières, un des outils essentiels de la démonstration. Elle contenait 7 questions, centrées autour de l'équivalence pour une série entière entre être solution d'une équation différentielle et avoir des coefficients qui satisfont à une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.

– La partie D présentait en 6 questions la stratégie générale de la démonstration, qui réduit le problème à démontrer que si l'on a une relation linéaire $b_1e^{a_1}+\cdots+b_re^{a_r}=0$, alors une certaine série entière $v(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_nx^n$ doit être le développement en série d'une fraction rationnelle. Le but des questions 18 à 22 était d'exploiter les propriétés de la transformée de Laplace et des pôles des fractions rationnelles pour voir qu'une telle série n'est jamais rationnelle.

– L'énoncé de rationalité de la série $v(x)$ découle d'une étude fine de l'arithmétique de ses coefficients $v_n$, et c'est à ce sujet qu'étaient consacrées les 10 questions de la partie E. La dernière était indépendante du reste et visait à établir un lien avec les intégrales qui apparaissent dans d'autres preuves plus classiques.

– Dans la très courte partie F, composée de 3 questions, on synthétisait tous les résultats obtenus dans la partie E sous forme de quelques inégalités pour finir la démonstration de la rationalité de $v$ et donc du théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass.

– La partie G introduisait une généralisation des polynômes exponentiels : les fonctions $E$ à coefficients rationnels. Elle contenait 9 questions, portant sur le rayon de convergence des fonctions $E$ et de leurs transformées de Laplace, la caractérisation des polynômes exponentiels à l'intérieur des fonctions $E$, ainsi qu'un exemple d'une fonction $E$ qui n'est pas un polynôme exponentiel : la fonction de Bessel $J_0$. Comme l'indiquait la note “pour la culture” à la fin du sujet, la dernière question contenait l'un des ingrédients sur lesquels repose la méthode mise en place par Y. André à la fin des années 90 pour démontrer le théorème de Siegel-Shidlovskii (un énoncé de transcendance pour les valeurs des fonctions E en des nombres algébriques généralisant le théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass) : si une fonction $E$ s'annule en $x=1$, alors le quotient $f(x)/(x-1)$ est encore une fonction $E$.

**Remarques générales**

Tous les candidats et candidates ont été méritants de se confronter à une épreuve longue et difficile. Les applications classiques des outils et des techniques du programme des classes préparatoires étaient rares et la plupart des questions demandaient un effort de recherche et de réflexion. Un défaut généralisé mérite d'être mentionné : le manque de propreté des copies. Une proportion significative des copies avaient une écriture difficilement lisible et très peu soignée. Il ne semble donc pas inutile de rappeler ici quelques usages qui ne peuvent qu'améliorer les dispositions des correcteurs : écrire lisiblement, raturer proprement, encadrer les résultats, et effectuer les calculs au brouillon avant de les recopier.

## Remarques détaillées

**Question 1 (1 point)**

Il fallait utiliser l'hypothèse $a \neq 1$ pour dire que $\log(a)$ n'est pas nul. En supposant $\log(a)$ rationnel, on applique le théorème à 0 et $\log(a)$ pour aboutir à une contradiction. Une réponse claire et concise à cette question annonçait les bonnes copies.

**Question 2 (1 point)**

On se servait de la propriété $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}$ rappelée au début du sujet pour transformer la relation algébrique $P(e^a) = 0$ en une relation linéaire entre $e^0, e^a, e^{2a}, \dots$ puis l'hypothèse $a \neq 0$ pour garantir que les nombres rationnels $0, a, 2a, \dots$ sont distincts. Cette question a été en général mieux traitée que la précédente.

**Question 3 (1 point)**

Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$ converge, alors $c_n\alpha^n \to 0$. L'hypothèse $\alpha \geq 1$ implique $c_n \to 0$, donc $|c_n| < 1$ pour $n$ assez grand, mais un nombre entier ayant cette propriété est forcément nul. Un très grand nombre de copies contenait des arguments inutilement alambiqués.

**Question 4 (1 point)**

En utilisant la définition de produit de séries entières donnée dans le sujet, $Qf = 1$ équivaut à $c_0 d_0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{n} c_n d_{n-k} = 0$ pour tout $n \geq 1$. L'hypothèse que 0 n'est pas racine de $Q$ implique l'existence et unicité de $d_0$, puis des coefficients $d_1, d_2, \dots$ par récurrence. Les formules montrent aussi la propriété d'intégralité demandée. La grande majorité des copies ont résolu correctement cette question.

**Question 5 (1 point)**

Il était utile pour établir l'unicité des différents développements de commencer par observer qu'il n'y a pas de diviseur de zéro dans $\mathbf{Q}[\![x]\!]$. Beaucoup de copies ont perdu du temps en refaisant les calculs de la question 4, ce qui n'était pas nécessaire une fois que l'on connaissait l'existence d'un inverse de $Q$.

**Question 6 (1 point)**

Le but de cette question était de remonter le moral des élèves et de leur préparer à la question 7. On pouvait choisir pour $b$ le ppcm des dénominateurs de $Q$ ou leur produit (option plus populaire). Rares sont les copies où la réponse n'était pas correcte.

**Question 7 (1 point)**

On écrivait $f = (\alpha P)/(\beta Q)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$ et $P_1, Q_1 \in \mathbf{Q}[x]$ des polynômes ayant terme constant égal à 1, on choisissait un entier $B$ tel que $P(Bx)$ et $Q(Bx)$ ont des coefficients entiers grâce à la question 6 et on appliquait la partie de la question 4 concernant les inverses des séries entières à coefficients entiers. Encore ici, beaucoup de copies ont refait un raisonnement très proche de celui de la question 6 au lieu d'exploiter le résultat.

**Question 8 (2 points)**

Il fallait avoir l'idée d'établir la non-rationalité de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ en démontrant que le produit par tout polynôme non nul n'est pas un polynôme. Une fois que l'on avait cette idée, ce qui n'était pas évident, on démontrait simplement que c'était le cas en utilisant que les coefficients sont très lacunaires. Une petite quantité de copies (mais non négligeable !) a essayé de dire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ n'est pas globalement bornée.

**Question 9 (2 points)**

Essentiellement toutes les copies ont proposé l'exemple de la série $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, mais très peu ont justifié correctement que sa primitive $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ n'est pas le développement en série entière d'une fraction rationnelle. Suivant la logique du sujet, le plus simple était d'utiliser la question 7 et d'argumenter que cette série n'est pas globalement bornée car il y a un nombre infini de premiers divisant les dénominateurs des coefficients. Certaines copies ont essayé de déduire le résultat de l'irrationalité de $\log(a)$ et ont eu la presque totalité de points lorsque le degré de justification a été jugé satisfaisant.

**Question 10 (5 points)**

Cette question finale de la partie B était explicitement indiquée comme étant plus difficile que les précédentes et les suivantes et a été extrêmement peu abordée, en général seulement par les meilleures copies. Il fallait d'abord combiner l'existence de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels et le fait que les séries globalement bornées forment un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel pour se ramener à l'énoncé qu'une série non nulle de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{s} c_i b_i^n\right) x^n$ n'est jamais globalement bornée, puis avoir l'idée de choisir convenablement un nombre premier et d'utiliser le petit théorème de Fermat pour l'établir. Les quelques copies contenant tous ces ingrédients ont été récompensées.

**Question 11 (1 point)**

Le but de la question était de se familiariser avec le fait que $x$ et $d/dx$ ne commutent pas dans l'anneau des opérateurs différentiels. On pouvait donner une preuve simple par récurrence en utilisant la formule de Leibniz pour les dérivées supérieures d'un produit. En général, les réponses ont manqué de clarté et concision.

**Question 12 (1 point)**

Si $f = P/Q$, en calculant la dérivée par la règle usuelle on voit que $f$ est annulée par l'opérateur différentiel $P(x)Q(x)d/dx + (P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x))$, qui est bien d'ordre 1.

Certaines copies ont utilisé d'autres méthodes qui donnaient lieu à des équations différentielles d'ordre supérieur et ont eu une partie des points lorsqu'elles étaient correctes.

**Question 13 (3 points)**

L'implication la plus simple a été en général bien traitée, au détail près que certaines copies ont oublié d'argumenter que l'on pouvait choisir les $S_i$ à coefficients entiers. Peu de copies ont démontré correctement qu'une relation de récurrence induisait une équation différentielle. Pour ce faire, il fallait avoir l'idée d'écrire un élément de $\mathbf{Z}[x]$ comme combinaison linéaire des polynômes échelonnés $(x+i)(x+i-1)\cdots(x+i-j-1)$.

**Question 14 (1 point)**

Cette deuxième preuve de la non-rationalité de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ consistait à voir qu'elle n'est pas solution d'une équation différentielle non nulle. Après l'avoir traduite en termes de récurrence entre les coefficients grâce à la question 13, c'était encore le caractère lacunaire des coefficients qui donnait le résultat. Une erreur très fréquente a été de supposer que l'existence d'une équation différentielle d'ordre 1 se traduisait en une relation de récurrence de longueur 1, c'est-à-dire de la forme $S_0(n)c_n + S_1(n)c_{n+1}$.

**Question 15 (3 points)**

La plupart des copies ont répondu correctement à la première moitié de la question, en remarquant que les coefficients satisfaisaient à une relation de récurrence et en utilisant la question 13. Essentiellement aucune copie n'a réussi à expliciter une équation différentielle correcte. Il y en a qui ont repris l'algorithme de la question 13 mais qui se sont arrêtés au milieu des calculs un peu pénibles de décomposition en des bases échelonnées. L'astuce (diabolique ?) consistait à travailler avec l'opérateur $\theta = xd/dx$ au lieu de $d/dx$, car celui-là préserve le degré et permettait de voir facilement que la série était annihilée par l'opérateur différentiel $L = \theta^5 - x(2\theta+2)(2\theta+1)(3\theta+3)(3\theta+2)(3\theta+1)$, que l'on pouvait par la suite mettre sous forme standard en utilisant les règles de commutation de la question 11.

**Question 16 (1 point)**

La plupart des copies ayant traité cette question ont remarqué que les coefficients de la série étaient égaux à $\binom{2n}{n}^2\binom{3n}{n}$ et donc des entiers. C'est la réponse la plus économique. Certaines copies ont raisonné en utilisant la formule pour la valuation $p$-adique de $n!$ et l'inégalité $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor - 5\lfloor x \rfloor \geq 0$ pour tout $x$, qui est la méthode que le concepteur du sujet avait en tête en écrivant cette question et a l'avantage de s'appliquer à d'autres situations.

**Question 17 (1 point)**

Grâce à la question 13, il suffisait de démontrer qu'une suite $(c_n)$ satisfait à une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux si et seulement s'il en va de même pour la suite $(c_n/n!)$. Il fallait faire attention à multiplier et diviser par la bonne factorielle pour que les coefficients de la relation de récurrence restent des polynômes en $n$.

**Question 18 (1 point)**

Après le calcul immédiat de la transformée de Laplace, très peu de copies ont argumenté de manière satisfaisante que $f$ n'était pas la fonction nulle, ce qui revenait à dire que les fonctions $e^{a_1 x}, \dots, e^{a_r x}$ sont linéairement indépendantes pour des rationnels distincts $a_1, \dots, a_r$. Une possibilité consistait à observer que $\widehat{f}$ n'est pas la fraction rationnelle nulle puisque par hypothèse il existe un $a_i$ non nul et qu'elle a un pôle en $1/a_i$.

**Questions 19 et 20 (0,5 points chacune)**

Questions cadeau qui ont été résolues correctement par essentiellement toutes les copies.

**Question 21 (1 point)**

Il fallait calculer explicitement l'action de l'opérateur différentiel $-x^2 d/dx + (1-x)$ sur une fraction rationnelle $P/Q$ et déduire de l'expression obtenue dans la question 20 que le polynôme $Q$ s'annule en tout $1/a_i$ avec $a_i$ non nul. Question très peu abordée.

**Question 22 (2 points)**

C'était une question plus difficiles que les précédentes, où il fallait avoir l'idée de regarder l'ordre (défini au début de la partie C) des pôles $1/a_i$. Comme les pôles de $\sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{1-a_i x}$ sont tous simples, il fallait ensuite argumenter que si $v$ était le développement en série entière d'une fraction rationnelle alors $(Lv)(x)$ aurait des pôles d'ordre au moins 2. Rarissimes ont été les copies qui l'ont fait correctement, en étudiant soigneusement l'ordre des pôles d'une somme et d'une dérivée. À la fin de cette question, la démonstration du théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass était réduite à celle de l'énoncé : s'il existe une relation linéaire $b_1 e^{a_1} + \cdots + b_r e^{a_r} = 0$, alors $v$ est le développement en série d'une fraction rationnelle. C'était l'objectif des parties E et F dans la suite du sujet.

**Question 23 (4 points)**

L'implication facile a été traitée par beaucoup de copies, mais très rares ont été celles qui ont réussi à démontrer que la propriété de divisibilité des polynômes exponentiels impliquait le théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass. Partant de $b_1 e^{a_1} + \cdots + b_r e^{a_r} = 0$, on l'appliquait au polynôme exponentiel à coefficients constants $f(x) = b_1 e^{a_1 x} + \cdots + b_r e^{a_r x}$. Il fallait se rendre compte que la série $v(x)$ n'était rien d'autre que la transformée de Laplace de $g(x) = f(x)/(x-1)$, d'où l'égalité $\widehat{f} = Lv$. Si $g$ est un polynôme exponentiel, alors $v$ est une fraction rationnelle, ce qui n'est pas possible par la question 22.

**Question 24 (0,5 points)**

Question cadeau, où tout ce qu'il fallait faire était de mettre ensemble les définitions des nombres $s_i$ et des coefficients $u_n$.

**Question 25 (1 point)**

On commençait par observer que $D^i s_i$ est un entier car $s_i$ est la fonction symétrique de degré $i$ en $a_1, \dots, a_r$ et que $D$ en est un dénominateur commun, puis on obtenait la propriété $D^n u_n \in \mathbf{Z}$ par récurrence en faisant attention à l'hypothèse faite au début de la partie E que $u_0, \ldots, u_{r-1}$ sont des entiers. Cette question a été bien résolue par beaucoup de copies ayant sauté les aspects les plus difficiles des parties B, C et D.

**Question 26 (1 point)**

Extrêmement peu de copies ont compris que la borne à démontrer n'était pas une propriété générale, mais qu'il fallait utiliser l'annulation de $b_1 e^{a_i} + \cdots + b_r e^{a_r}$ sous la forme de l'égalité $v_n = -n! \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{u_i}{i!}$ pour les coefficients de la série $v_n$. Cette observation étant faite, il était simple de borner $|v_n|$ en termes de $A$ pour obtenir l'inégalité demandée.

**Question 27 (1 point)**

Beaucoup de copies ont voulu gratter des points en démontrant l'implication évidente. Pour obtenir l'autre, il fallait se rappeler de la question 21, où il avait été démontré que les pôles de $v$ appartiennent à l'ensemble des $1/a_i$ avec $a_i$ non nul. Pour faire le lien avec le polynôme $1 - s_1 x - \cdots - s_r x^r$, il fallait traiter séparément le cas où l'un des $a_i$ est nul.

**Question 28 (0,5 points)**

C'était une conséquence directe de la définition de la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) x^n$, comme le suggérait la formulation de la question : Observer l'égalité... D'ailleurs, certaines copies ont répondu avec humour : j'observe.

**Question 29 (1 point)**

On démontrait les deux assertions par récurrence, en mettant ensemble la propriété d'intégralité de la question 25, la relation de récurrence observée dans la question 28 et la borne de la question 26. Question très peu abordée.

**Question 30 (2 points)**

Une possibilité consistait à utiliser l'identité $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\ell} a_i^{n-\ell} x^{n-\ell} = (1 - a_i x)^{-\ell-1}$ pour récrire chaque terme du côté gauche, puis mettre un dénominateur commun et estimer le degré du numérateur résultant. C'était calculatoire mais pas évident du tout et seulement les meilleures copies ont bien réussi cette question.

**Question 31 (2 points)**

Pour démontrer l'égalité $v_n(k) = w_n(k)$ pour $n \geq kr$, on voyait à l'aide de la formule de la question 30 que la série génératrice des coefficients $v_n(k) - w_n(k)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $kr$. Question très peu abordée.

**Question 32 (1 point)**

Grâce à la question 31, il suffisait de voir que $k!$ divise $D^n w_n(k)$, ce qui se faisait par récurrence sur $k$, suivant la même méthode de la question 29, une fois que l'on avait observé que $k!$ divise $D^{n-k} w_{n,k}$. Juste une poignée de réponses correctes.

**Question 33 (2 points)**

La méthode la plus simple consistait à démontrer que l'intégrale du côté droit satisfaisait à la même relation de récurrence que $v_n(k)$ et que sa valeur pour $k = 0$ était égale à $v_n$. La première partie était évidente et pour la deuxième il fallait savoir calculer $\int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^n dt$, par exemple par récurrence sur $n$ en intégrant par parties.

**Question 34 (0,5 points)**

Question de synthèse, où il suffisait de mettre ensemble les questions 29 et 32. La plupart des copies qui l'ont traité ont oublié d'utiliser la non-nullité de $v_n(k)$ pour établir l'inégalité $k! \leq |D^n v_n(k)|$ à partir de la propriété de divisibilité.

**Question 35 (0,5 points)**

L'astuce consistait à utiliser le fait que la factorielle croît plus rapidement que n'importe quelle puissance pour choisir un entier $k_0$ tel que $k! > c_2(AD)^{10kr}C^k$. Il y a eu extrêmement peu de réponses satisfaisantes.

**Question 36 (1 point)**

En combinant l'annulation de la question 35 avec la récurrence de la question 28, on trouvait $v_n(k) = 0$ pour tout $k_0 \leq k \leq n/10r$, qui est équivalent à ce qu'il fallait démontrer.

**Question 37 (1 point)**

Il suffisait d'utiliser la borne $|b_n| \leq C^n$ dans la définition de fonction $E$ pour comparer avec la série exponentielle $e^{Cx}$ dont le rayon de convergence est infini. C'était une question facile qu'un certain nombre de copies globalement pas très bonnes ont traité correctement.

**Question 38 (2 points)**

Cette fois-ci, il fallait utiliser la borne sur le dénominateur commun des coefficients et se rappeler du résultat établi dans la question 3 pour aboutir à une contradiction avec l'hypothèse que $f$ n'était pas un polynôme. Très peu de solutions correctes.

**Question 39 (1 points)**

Les fonctions $E$ dont la transformée de Laplace est aussi une fonction $E$ sont réduites aux polynômes, supposés ici à coefficients rationnels. C'était une conséquence immédiate de la conjonction des questions 37 et 38.

**Question 40 (4 points)**

Beaucoup de copies ont gratté des points en répondant à la partie facile, à savoir que les coefficients de $f + g$ et de $fg$ satisfont aux conditions de croissance dans la définition de fonction $E$ et ont passé sous silence la partie intéressante de la question, à savoir qu'être solution d'une équation différentielle est stable par somme et produit. Pour démontrer cela, il fallait avoir l'intuition que cette propriété est équivalente à demander que $f, f', f'', \ldots$

engendrent un $\mathbf{Q}(x)$-espace vectoriel de dimension finie. Aucune copie n'y est parvenu, mais il faut bien avouer que ce n'était pas évident...

**Question 41 (1 point)**

Que les polynômes exponentiels sont des fonctions $E$ résultait immédiatement de la question 40. Pour voir que leurs transformées de Laplace sont des fonctions rationnelles, une possibilité consistait à reprendre le calcul de $\widehat{xf}$ dans la partie D pour se réduire par linéarité et récurrence sur le degré des polynômes multipliant les facteurs exponentiels au cas de $e^{cx}$, dont la tranformée de Laplace est la fonction rationnelle $1/(x-c)$.

**Question 42 (1 point)**

C'était une question de synthèse, que l'on pouvait résoudre en combinant les résultats de la question 7 (les fonctions rationnelles sont globalement bornées) et des questions 12 et 17 (existence de l'équation différentielle) avec le fait que le développement en série entière d'une fonction rationnelle sans pôle en 0 a rayon de convergence strictement positif.

**Question 43 (3 points)**

On pouvait utiliser la question 13 pour voir que $J_0(x)$ était solution d'une équation différentielle. Après avoir récrit la série sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, il était facile d'estimer les coefficients et leurs dénominateurs communs et d'obtenir une expression pour la transformée de Laplace. On pouvait alors utiliser la formule du binôme généralisée pour montrer qu'elle a les mêmes coefficients que $(1+x^2)^{-1/2}$.

**Question 44 (3 points)**

Encore une question difficile, où il fallait avoir suffisamment explicité l'équation différentielle satisfaite par la fonction de Bessel dans la question 43 pour se rendre compte qu'elle était d'ordre 2 et que ses seules singularités étaient en zéro et à l'infini, puis argumenter par exemple à l'aide du théorème de Cauchy qu'une fonction solution d'une telle équation différentielle ne peut pas avoir des zéros non nuls doubles. Quelques excellentes copies ont répondu correctement à cette question.

**Question 45 (2 points)**

Si $L$ est un opérateur différentiel annihilant $f(x)$, alors $L \cdot (x-1)$ est un opérateur différentiel annihilant $g(x) = f(x)/(x-1)$. Il fallait ensuite écrire les coefficients de $g$ en fonction de ceux de $f$ et utiliser l'hypothèse $f(1) = 0$ pour estimer leur valeur absolue.