

Banque PC inter-ENS - Session 2024

Rapport du jury relatif à l'épreuve orale de Mathématique

Écoles partageant cette épreuve : ENS ULM, ENS DE LYON

Coefficients (en pourcentage du total d'admission de chaque concours) :

- ENS ULM
 - Option Physique : 17,1 %
 - Option Chimie : 13,7 %
- ENS de Lyon : 7,0 %

Membres du jury : P. Dario, R. Ducatez, L. Lehéricy, E. Pacherie.

Commentaires généraux

Nous voudrions souligner le très bon niveau global et la bonne préparation des élèves même si nous avons aussi observé une forte disparité avec de très bonnes surprises mais aussi de très mauvaises performances. Dans l'ensemble les élèves ont démontré une bonne connaissance des notions du programme et de bons réflexes dans les calculs. Cependant nous regrettons le manque de prise d'initiative de beaucoup de candidats face à un problème plus difficile. Nous rappelons par exemple, qu'il est fortement encouragé de commencer par considérer des cas simples (matrices diagonales, premiers termes d'une suite, ...) et que s'entêter dans des calculs longs et fastidieux sans une compréhension préalable du problème ne conduit en général qu'à une perte de temps.

Maîtrise des notions du programme

Algèbre : Nous avons observé un très bon niveau global et les élèves ont en général mieux réussi les exercices sur cette thématique qu'en analyse ou en probabilités.

Analyse : Les élèves ont montré de bons réflexes pour la résolution d'équations différentielles mais ont souvent été beaucoup plus approximatifs sur les exercices où une définition formelle avec quantificateurs était nécessaire. Nous regrettons aussi que, pour certains élèves, les développements de Taylor ne soient pas devenus des automatismes.

Probabilités : La majorité des élèves ont une bonne maîtrise des outils de base en probabilités (inégalité de Tchebychev, loi des grands nombres, ...) et dans les calculs avec les lois aléatoires usuelles (Poisson, Géométrie, ...). Beaucoup

plus problématiques par contre ont été les exercices de type dénombrement et nous déplorons, pour trop d'élèves, un manque d'aisance et d'intuition sur ce genre d'exercices.

Exemples d'exercices

Exercice (analyse) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée.

1. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) \exp(-tx^2)| = |f(0)|.$$

2. On suppose $f \in \mathcal{C}^1$, $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Donner un équivalent asymptotique à

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) \exp(-tx^2)| \text{ pour } t \rightarrow \infty.$$

Exercice (probabilité) On tire successivement des boules, sans remise, uniformément au hasard, dans une urne qui contient n boules multicolores donc exactement deux sont rouges. On s'arrête quand on tire la seconde boule rouge, et on note T le nombre de tirages effectués. Calculer $\mathbb{E}[T]$.

Exercice (algèbre) On note $M(t) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dépendant du temps telle que pour tout $M_{ij}(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\frac{d}{dt} [\det(M(t))] = \det M(t) \operatorname{Tr} \left(M(t)^{-1} \frac{d}{dt} M(t) \right)$$

pour tout t , tel que $M(t)$ est inversible.

1. Montrer la formule dans le cas de matrices diagonales.
2. Montrer que pour toute matrice A

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det(I + \epsilon A) - 1}{\epsilon} = \operatorname{Tr}(A)$$

3. Montrer la formule dans le cas général.

Une liste plus exhaustive d'exercices peut être trouvée ici :

https://math.univ-lyon1.fr/~ducatez/content/Exercices_Oraux_ENS_PC_2024.pdf