

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
Concours d'admission session 2025
Filière universitaire : Second concours
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

★ ★ ★

L'épreuve se compose d'un exercice et d'un problème qui peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

Exercice

Une inégalité de Poincaré.

Dans cet exercice, on note

$$E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs réelles, s'annulant en 0 et en 1.

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Poincaré :

$$\forall f \in E, \int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(x))^2 dx$$

et de caractériser les fonctions $f \in E$ pour lesquelles il y a égalité.

On définit la fonction $\cotan :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]0, \pi[, \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

1. Déterminer un équivalent simple de $\cotan(x)$ lorsque x tend vers 0 puis un équivalent simple de $\cotan(x)$ lorsque x tend vers π .
2. Soit $f \in E$. On note

$$I = \int_0^1 f(x)f'(x) \cotan(\pi x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 (f'(x) - \pi f(x) \cotan(\pi x))^2 dx.$$

- (a) Montrer que l'intégrale I est bien définie.
- (b) Montrer que

$$2I = \pi \int_0^1 (f(x))^2 (1 + (\cotan(\pi x))^2) dx.$$

- (c) Montrer que l'intégrale J est bien définie.
- (d) En développant J , montrer que

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in]0, 1[, y'(x) = \pi \cotan(\pi x) y(x).$$

4. Déterminer les fonctions $f \in E$ telles que $\int_0^1 (f(x))^2 dx = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(x))^2 dx$.

Problème

Autour de l'inégalité de Golden-Thompson.

Dans tout le problème, $M_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.

On rappelle que si $M \in M_n(\mathbb{R})$, on définit

$$e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on rappelle que $\text{tr}(A)$ désigne la trace de A .

Partie I. Une formule de Sophus Lie (1875).

1. Montrer que pour tous $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$M^k - N^k = \sum_{i=0}^{k-1} M^i (M - N) N^{k-1-i}.$$

2. Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\|e^M\| \leq e^{\|M\|}.$$

3. Montrer que pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\| e^{A+B} - \left(e^{A/k} e^{B/k} \right)^k \right\| \leq k e^{\|A\| + \|B\|} \left\| e^{(A+B)/k} - e^{A/k} e^{B/k} \right\|.$$

4. Montrer que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \left\| e^{(A+B)/k} - e^{A/k} e^{B/k} \right\|_{k \rightarrow +\infty} = O(1/k^2).$$

5. En déduire la formule de Lie :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(e^{A/k} e^{B/k} \right)^k = e^{A+B}.$$

Partie II. Inégalité de Golden-Thompson (1965).

1. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$|\operatorname{tr}(AB)| \leq \sqrt{\operatorname{tr}(AA^T)} \sqrt{\operatorname{tr}(BB^T)}.$$

2. Soit $p = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall A_1, A_2, \dots, A_p \in M_n(\mathbb{R}), |\operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_p)| \leq \prod_{i=1}^p \left(\operatorname{tr} \left((A_i A_i^T)^{p/2} \right) \right)^{1/p}.$$

3. Soit $p = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices symétriques réelles.

- (a) Montrer que

$$|\operatorname{tr}((AB)^p)| \leq \operatorname{tr} \left((A^2 B^2)^{p/2} \right).$$

- (b) En déduire que

$$\operatorname{tr}((AB)^p) \leq \operatorname{tr}(A^p B^p).$$

4. A l'aide de la formule de Lie, démontrer l'inégalité de Golden-Thompson :

$$\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(e^{A+B}) \leq \operatorname{tr}(e^A e^B).$$

T.S.V.P.

Partie III. Une application probabiliste.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit

$$Y : \Omega \rightarrow S_n(\mathbb{R})$$

une variable aléatoire discrète à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_{\max}(Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire réelle égale à la plus grande valeur propre de Y . Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M_Y(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta Y}) \in S_n(\mathbb{R})$ où l'espérance d'une matrice est l'espérance coefficient par coefficient. *Dans toute cette partie, on suppose que toutes les espérances considérées sont finies.*

1. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \theta > 0, \mathbb{P}(\lambda_{\max}(Y) \geq t) = \mathbb{P}(\lambda_{\max}(e^{\theta Y}) \geq e^{\theta t}) \leq e^{-\theta t} \text{tr}(M_Y(\theta)).$$

En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\lambda_{\max}(Y) \geq t) \leq \inf_{\theta > 0} (e^{-\theta t} \text{tr}(M_Y(\theta))).$$

2. Soient $X_1 : \Omega \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ et $X_2 : \Omega \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Golden-Thompson, que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \text{tr}(M_{X_1+X_2}(\theta)) \leq \text{tr}(M_{X_1}(\theta)M_{X_2}(\theta)).$$

3. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur Ω , indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

- (a) Montrer que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \text{tr}(M_{Y_k}(\theta)) \leq \text{tr}(M_{Y_{k-1}}(\theta)M_{X_k}(\theta)) \leq \lambda_{\max}(M_{X_k}(\theta)) \text{tr}(M_{Y_{k-1}}(\theta)).$$

Indication : on pourra démontrer et utiliser le fait que si A et B sont deux matrices symétriques positives, alors $\text{tr}(AB) \geq 0$.

- (b) En déduire que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \text{tr}(M_{Y_k}(\theta)) \leq n (\lambda_{\max}(M_{X_1}(\theta)))^k.$$

- (c) En déduire enfin que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\lambda_{\max}(Y_k) \geq t) \leq n \inf_{\theta > 0} (e^{-\theta t} (\lambda_{\max}(M_{X_1}(\theta)))^k).$$

4. *Un exemple.*

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur Ω à valeurs dans $S_2(\mathbb{R})$, indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que

$$X_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

où ε_1 et ε_2 sont deux variables aléatoires de Rademacher indépendantes :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note comme précédemment $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

- (a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2[$, lorsque k tend vers $+\infty$, on a

$$\mathbb{P}(\lambda_{\max}(Y_k) \geq k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \leq 2e^{-\frac{k^{2\varepsilon}}{4} + o(k^{2\varepsilon})}.$$

- (b) Quelle est la nature de la série $\sum_k \mathbb{P}(\lambda_{\max}(Y_k) \geq k^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$?

- (c) En déduire la probabilité de l'événement "l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lambda_{\max}(Y_k) \geq k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ est fini".