Rapport de l'épreuve d'Oral de Mathématiques

- Banque BCPST INTER-ENS — Session 2025
- Écoles concernées : **Mines de Paris / ENPC / Centrale (Lyon, Lille, Nantes, Mediterranée)**
- Coefficient en pourcentage du total d'admission : 17,5%
- Jury : Jonathan Harter & Mathieu Remy

1 PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE

L'épreuve d'Oral de Mathématiques dure 50 minutes et est précédée de 15 minutes de préparation. Elle se déroule dans les locaux de l'ENPC.

Elle consiste en deux exercices permettant de balayer une vaste partie du programme de Mathématiques des deux années de classe préparatoire. Elle ne comporte pas d'Informatique. L'objectif de cet oral est de sélectionner des candidates et candidats capables de suivre un cursus exigeant en Mathématiques.

Quelle qu'ait été la préparation du candidat, les deux exercices seront abordés pendant l'oral, permettant ainsi au jury d'évaluer aussi le candidat sur sa réactivité face à des questions nouvelles auxquelles il n'aura pas eu le temps de réfléchir pendant les 15 minutes de préparation.

On attend du candidat qu'il sache traiter d'emblée des questions classiques et faisant appel aux méthodes du cours. En revanche il est légitime sur des questions plus difficiles qu'il soit amené à réfléchir et à proposer des pistes qui n'aboutiront pas, du moment qu'elles sont cohérentes et justifiées par rapport à l'exercice, et démontrent à la fois une bonne connaissance du cours et un esprit d'initiative. Le jury rappelle que son rôle est d'évaluer afin de classer, ce qui l'amène à interroger les candidats. Cet oral n'est pas un « écrit au tableau » mais bien un dialogue pertinent sur les Mathématiques.

2 REMARQUES DU JURY

Commençons par une remarque préliminaire : de façon générale, toute notion utilisée n'étant pas au programme de BCPST peut faire l'objet d'une question de cours et d'une demande d'éclaircissement. Citons quelques exemples classiques :

- le critère de Riemann pour les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \notin \{1, 2\}$) ou les intégrales $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$: il est attendu que les candidats sachent expliquer la convergence ou divergence de l'objet pour la puissance considérée.
- Le critère sur les petits o pour la nature de séries et d'intégrales : il est ici attendu que les candidats sachent transformer la relation en inégalité locale.
- L'inégalité des accroissements finis, ou encore l'utilisation de la trace pour le calcul des valeurs propres.

2.1 Algèbre

Le cours sur la diagonalisation est globalement su et maîtrisé. Les calculs sur les éléments propres sont souvent efficaces en petite dimension, mais posent soucis lors d'exercices plus abstraits. Par exemple, lorsqu'un endomorphisme ou une matrice est solution d'une équation polynomiale. Il est conseillé également de ne pas recourir systématiquement au critère de diagonalisabilité sur les dimensions; par exemple, la définition de diagonalisable suffit souvent pour conclure lorsqu'une matrice ou un endomorphisme ne possède qu'une seule valeur propre.

2.2 Analyse

Les candidats sont toujours peu à l'aise avec l'utilisation des valeurs absolues, et, de manière générale, les majorations de grandeurs. Ce qui est pourtant une démarche essentielle en analyse afin d'étudier des sommes, des intégrales *etc.*. L'utilisation de valeurs absolues est pourtant bien pratique lorsque l'on souhaite prouver la convergence vers zéro d'un produit de deux termes n'étant pas forcément tous deux positifs.

Cette année, en revanche, le théorème de comparaison est mieux appliqué dans l'ensemble.

Le calcul intégral, notamment l'intégration par parties et le changement de variable, y compris pour les intégrales généralisées, est plutôt bien maitrisé chez les candidats interrogés mais une justification spontanée est attendue (au moins oralement) : elle est encore bien souvent oubliée, et nous perdons du temps à la demander si ce n'est pas le cas. Les comparaisons somme/intégrale sont traitées généralement avec succès.

2.3 Probabilités

Les candidats sont plutôt à l'aise sur les calculs de probabilité discrète et sur la compréhension des expériences, mais des difficultés sont notées sur la justification de ces calculs (avec des opérations sur les évènements ou variables aléatoires pertinentes). Les calculs sur les lois à densité sont en revanche plus problématiques : il n'est pas rare, même chez de très bons candidats, que l'étude d'un évènement du type $\{|X| \geqslant a\}$ pose beaucoup de difficultés. Pour autant le produit de convolution était plutôt bien compris par les candidats, sans avoir à rappeler la formule.

2.4 Forme & Présentation

Il est rappelé aux candidates et candidats qu'ils sont responsables de la présentation & gestion du tableau; un équilibre doit être trouvé en la quantité d'informations écrites au tableau et l'efficacité. Nous conseillons tout de même d'écrire tous les éléments importants même s'ils ont été donné ou trouvé à l'oral. Enfin il n'est pas normal de demander à l'examinateur « est-ce que je peux effacer? » tout au long de l'oral : il est conseillé d'exploiter tout le tableau afin de ne pas être contraint trop souvent à l'effacement.

Banque ÉNS – ENPC/Mines de Paris ©

2.5 Conclusion

De manière générale, les étudiants sont bien préparés, ont une attitude volontaire pour avancer et tiennent compte des indications données. Même si l'épreuve écrite de Mathématiques ne compte pas pour l'admissibilité, le niveau global est bon, et tous les candidats réussissent globalement à traiter une partie conséquente des exercices posés. Il n'est pas attendu de traiter intégralement les deux exercices pour pouvoir obtenir la note maximale.

3 EXEMPLES DE SUJETS

3.1 Exemple 1

Exercice 1 | [Solution] Soit un entier $N \geqslant 2$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On y effectue une suite indéfinie de tirages avec remise. L'expérience est modélisée dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au numéro du premier tirage pour lequel k boules distinctes ont été obtenues au moins une fois. En particulier, X_N représente le numéro du premier tirage pour lequel toutes les boules de l'urne sont sorties au moins une fois. Par exemple, si $N = 10$ et que l'on tire $1; 3; 3; 2; \ldots$ alors $X_2 = 2, X_3 = 4$.

1. **1.1)** On note $T_1 = X_1$ et, pour tout $k \in [\![2, N]\!]$, $\quad T_k = X_k - X_{k-1}$. Montrer que T_k suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre p_k.
   1.2) En déduire l'espérance et la variance de T_k.
2. Dans la suite, on pourra admettre que les variables T_k sont mutuellement indépendantes. Montrer que X_N admet une espérance et une variance, et déterminer $\mathbb{E}(X_N)$ et $\mathbb{V}(X_N)$.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, on note : $\quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   3.1) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$.
   3.2) En déduire que : $\quad \mathbb{E}(X_N) \underset{N \to \infty}{\sim} N \ln(N)$.
4. **4.1)** Montrer que : $\quad \mathbb{V}(X_N) \leqslant 2N^2$.
   4.2) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $\quad \mathbb{P}(|X_N - NH_N| \geqslant \alpha N) \leqslant \frac{2}{\alpha^2}$.

Exercice 2 | [Solution] Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.

1. Dans le cas $n = 2$, on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\operatorname{Spec}(AB) = \operatorname{Spec}(BA)$.
2. Montrer que AB est inversible si et seulement si A et B le sont. En déduire que si 0 est valeur propre de BA alors 0 est valeur propre de AB.
3. Soit $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda \notin \operatorname{Spec}(AB)$. Justifier que :
$$(\lambda I_n - BA)(I_n + B(\lambda I_n - AB)^{-1}A) = \lambda I_n,$$
   et en déduire que λ n'est pas valeur propre de BA.
4. Montrer que AB et BA ont mêmes valeurs propres.

Banque ÉNS – ENPC/Mines de Paris

3.2 Exemple 2

Exercice 3 | Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{R}^n$ sera muni du produit scalaire canonique. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est une *similitude de rapport* $k \in \mathbb{R}_*^+$ lorsque : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|u(x)\| = k\,\|x\|$.

1. Dans tout l'exercice A désignera la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.
   Montrer que f est une similitude de $\mathbb{R}^3$ et en donner le rapport.
2. Démontrer que toute similitude de $\mathbb{R}^n$ est bijective. Montrer que la composée de deux similitudes est une similitude et que la réciproque d'une similitude est une similitude.
3. On reprend dans cette question l'étude de l'endomorphisme f de la question **1)**.
   3.1) Démontrer que $\operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est une droite dont on déterminera un vecteur directeur unitaire a.
   3.2) On note $F = \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})^{\perp}$. Quelle est sa dimension? En donner une base. Est-elle orthonormée?
   3.3) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont deux réels à déterminer.
4. **4.1)** Démontrer que : $\quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle x|y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.
   4.2) En déduire que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est une similitude de rapport k si et seulement si :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle f(x)|f(y) \rangle = k^2 \langle x|y \rangle.$$

Exercice 4 | Pour tout réel x on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, appelé sa *partie décimale*. Soient de plus X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ puis de $\lfloor X + Y \rfloor$.
2. Déterminer la loi de $\{X + Y\}$.
3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ toutes définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   3.1) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.
   3.2) Montrer que pour tout réel x et tout réel $y \in [0, 1[$: $\quad \{x + y\} = \{\{x\} + y\}$.
   3.3) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\{S_n\}$ puis $\mathbb{E}(\{S_n\})$.