

Banques MP et MPI inter-ENS – Session 2025
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

• **Écoles partageant cette épreuve :**

ENS Lyon, Paris-Saclay, Rennes et Ulm

• **Coefficients (en % du total des points de chaque concours) :**

— Lyon : MP concours MP et MI 10,8 % ; MP concours Info 11,3 ; MPI concours Math 10,4 %, MPI concours Info 11,3%

— Paris-Saclay : MP 9,6 % ; MPI 7,7 %

— Rennes : MP 9,6 % ; MPI 8,3 %

— Ulm : MP concours MP 4% ; MPI Option Math 4,4% ; MPI Option Info 5,6%

• **Membres du jury :**

François BOLLEY, Émeric BOUIN, Pascal BOYER, Didier LESESVRE, Kévin LE BALC'H, Jérémy LE BORGNE, Thomas SIMON, correcteurs

Présentation générale

Le sujet Math C 2025 portait sur l'étude d'inégalités de concentration pour la somme de variables aléatoires et pour des fonctions lipschitziennes et convexes sur l'espace euclidien.

L'épreuve a permis de tester l'aisance des candidates et candidats à manipuler les techniques et les outils classiques de probabilités, combinatoire, analyse réelle, géométrie de l'espace euclidien au programme des classes préparatoires, à l'aide de calculs et de bornes explicites et d'arguments abstraits.

Les notes se sont étalées de 0/20 à 20/20, avec une moyenne de 9,7/20 et un écart-type de 3,6. Le jury souhaite rappeler qu'il attend des candidates et candidats clarté, précision et rigueur, et ceci même sur les questions les plus élémentaires. Il n'a pas hésité à sanctionner fortement les réponses manquant de justifications convaincantes. Au contraire, le jury a apprécié la démarche de certaines candidates et certains candidats, malheureusement trop rares, annonçant clairement et honnêtement une possibilité de démonstration, qu'elle soit finalement réalisable ou non, et reconnaissant ne pas avoir en main les arguments précis pour la mener à bien. Notons par ailleurs que l'utilisation de notions et de raisonnements non ou mal maîtrisés, qu'ils soient ou non au programme du concours, n'est pas encouragée. La présentation entre également pour une part importante dans l'appréciation d'une copie, et l'utilisation d'un brouillon, même ponctuelle, est fortement recommandée. Enfin, il est rappelé qu'il convient de bien dégager les hypothèses nécessaires pour invoquer tout résultat au programme permettant de répondre à une question du sujet.

Seules la partie I et la question 1 de la partie II du sujet ont été abordées par un nombre représentatif de copies. Répondre correctement et entièrement aux premières questions, jusqu'à la question I.5.d) de la partie I permettait d'obtenir la moyenne. Traiter parfaitement la partie I permettait d'atteindre une note supérieure à 15/20. Le jury souhaite rappeler aux candidates et candidats qu'elles ou ils ne peuvent pas espérer obtenir une bonne note en se cantonnant aux questions les plus simples de chaque partie. Celles et ceux qui ont pris ce parti n'ont guère été récompensés.

Partie I

La première partie du sujet proposait d'établir des inégalités de concentration polynomiale puis gaussienne pour la somme de variables aléatoires satisfaisant diverses bornes et hypothèses d'indépendance. Un point clé était l'obtention de contrôles fins sur les moments de la somme de ces variables.

Cette partie a été abordée par toutes les candidates et tous les candidats, mais de manière très inégale. Le jury a été très pointilleux sur l'argumentation et les raisonnements des candidates et candidats ; il a lourdement sanctionné les réponses imprécises ou incomplètes.

La question I.1) était classique et a dans l'ensemble été bien réussie. Concernant les deux exemples de variables ne satisfaisant pas (8), le jury attendait des variables de lois n'appartenant pas à la même famille, et non par exemple deux variables de loi géométrique de paramètres différents.

La question I.2) nécessitait un peu d'initiative de la part des candidates et candidats ; elle était délicate et a été très peu réussie. Le caractère indépendant ou non des variables mises en jeu devait être mis en avant dans le raisonnement.

La question I.3) était plus classique. Le résultat utilisait de manière fondamentale le caractère décorrélé des variables. L'importance de la corrélation, voire de l'indépendance, aurait pu, a posteriori, guider les candidates et candidats dans la recherche d'un exemple à la question I.2). L'inégalité stricte dans le membre de gauche de (13) a curieusement perturbé certaines candidates et certains candidats, alors que l'inégalité de Markov, qui en est le point clé, est vraie pour des inégalités strictes ou larges dans la probabilité à majorer.

Les questions I.4.a) et I.4.b) ont été bien réussies dans l'ensemble. La question I.4.c) a été moins bien réussie : en particulier de nombreuses candidates et nombreux candidats ont perdu du temps dans des justifications vagues et inutilement longues ; la détermination précise et l'utilisation de la loi de Y_3 pouvait permettre d'aboutir plus rapidement aux conclusions demandées.

La question I.5.a) a été bien réussie dans l'ensemble. La question I.5.b) était nettement plus délicate. Sa résolution nécessitait l'utilisation précise de la k -indépendance et du centrage des variables. La question I.5.c) était également délicate. Elle a donné lieu à de nombreuses tentatives de raisonnements consciemment faux qui ont, ici comme ailleurs, été sévèrement sanctionnés par le jury. Il s'agissait de combiner astucieusement la borne ponctuelle (8) et l'hypothèse (9) sur la variance des X_n . Les questions I.5.d), e) et f) ont été bien réussies, notamment en e) par des raisonnements variés, appréciés du jury. La question I.5.g) a également été bien réussie. Il fallait cependant veiller à bien préciser que $\theta > 1$, sous l'hypothèse émise dans cette question, pour justifier la première inégalité à démontrer dans cette question, et même $\theta \geq 2$ pour en justifier la seconde inégalité. Dans la question I.5.h) il fallait appliquer l'inégalité de Markov à $(S_n)^k$: ceci n'était possible que parce que k est pair, ce que trop peu de candidates et candidats ont mentionné.

La question I.6.a) a été mal comprise par de nombreuses candidates et nombreux candidats, et par suite mal traitée. La question I.6.b) était de faible importance. Elle visait seulement à orienter les candidates et candidats vers le bon choix de l'entier k à effectuer dans la question I.6.c). Cette question I.6.c) a été très mal réussie. Il fallait exploiter précisément les majoration et minoration de l'entier k découlant de sa définition. La question I.6.d) a été abordée par très peu de candidates et candidats et avec peu de succès.

Partie II

La seconde partie du sujet proposait de démontrer une inégalité de concentration gaussienne pour des fonctions lipschitziennes et convexes (Théorème 1). Dans la question II.1. on supposait une propriété (40) de concentration de la mesure sur des ensembles convexes et on en déduisait la conclusion du Théorème 1. Dans la question II.2. on démontrait que cette propriété (40) sur les ensembles convexes est une conséquence d'une autre propriété (53) sur les ensembles convexes. Dans la question II.3. on démontrait cette propriété (53) par récurrence sur le nombre de variables aléatoires.

La question II.1.a) était délicate. Il s'agissait notamment de démontrer que l'ensemble A_s est convexe et d'utiliser l'inégalité de Markov à bon escient. La question II.1.b) était plus facile et nécessitait uniquement de choisir les bons paramètres dans la question II.1.a).

Les questions II.2.a), b) et c) ne présentaient pas de difficulté particulière mais nécessitait une bonne compréhension des objets géométriques P_A et R_A introduits dans cette question. La propriété démontrée dans la question II.2.d) était un résultat de géométrie des convexes utilisé dans la question II.2.e), qui fournissait un résultat de compacité utilisé lui-même dans la question II.2.g). Cette question II.2.d) a été abordée par un nombre relativement faible de candidates et candidats, et rarement avec succès. la question II.2.e) a été traitée correctement par une assez grande proportion des candidates et candidats parvenue à cette partie du sujet, et par des méthodes diverses, toutes appréciées du jury. La question II.2.f) demandait de déterminer et représenter graphiquement des objets géométriques relativement simples de $\mathbb{R}^3$; le jury a été déçu par le petit nombre de réponses correctes parmi les candidates et candidats ayant abordé cette question. Le jury s'attendait à ce que les candidates et candidats parvenus à cette question du sujet soient à l'aise avec ces objets géométriques.

À l'exception de quelques copies d'excellent niveau, les questions suivantes n'ont pas été abordées.