

Banque MP inter ENS – Session 2025

Rapport relatif à l'épreuve orale de Maths Ulm

Concours MP et MPI

Nicolas de Saxcé, Siarhei Finski, Cécile Gachet et Armand Riera

1 Déroulement de l'épreuve

L'oral, sans préparation, dure 55 minutes. Durant la première moitié de l'épreuve, le jury laisse le ou la candidate travailler en intervenant uniquement pour corriger des incompréhensions radicales de l'énoncé. Il est attendu que la ou le candidat lise et analyse l'énoncé en autonomie : cette autonomie, la capacité à faire le tri dans ses propres idées et à rectifier ses erreurs sans intervention du jury sont des compétences clés évaluées tout au long de l'oral.

On remarque que certains candidats ou candidates réfléchissent à voix haute, tandis que d'autres commencent leur travail en silence. Les deux méthodes sont acceptables, mais le jury réagira le moins possible aux candidates et candidats volubiles : une fois encore, il s'agit d'observer la réflexion propre du candidat ou de la candidate, et de garantir l'objectivité vis-à-vis d'attitudes différentes (qui n'ont rien à voir avec les compétences et aptitudes mathématiques évaluées par l'oral).

Le jury intervient généralement durant la seconde moitié de l'épreuve, notamment pour poser des questions sur l'approche choisie, guider la ou le candidat si cela semble pertinent ou nécessaire, demander une analyse détaillée ou des précisions techniques sur une question reliée au sujet, voire dans des cas rares pour proposer un autre exercice.

Malgré le format long et peu guidé de l'épreuve, la plupart des candidates et candidats se sont bien prêtés à l'exercice, ont tiré parti du temps de la réflexion qui leur était donné et ont fait preuve de créativité et de persévérance dans leurs oraux. Quelques rares candidats ou candidates ont néanmoins tenté "d'aller à la pêche aux indications" pendant la première moitié de l'épreuve en gaspillant le temps offert pour leur réflexion autonome. On remarque que les candidats ou candidates ayant pris le temps de réfléchir à leur exercice pendant au moins quinze minutes sans se précipiter vers le jury ont souvent eu plusieurs idées à présenter au jury en deuxième partie de l'oral. Toutes les idées ne sont pas toujours bonnes à prendre, mais garder à l'esprit plusieurs pistes a souvent enrichi la discussion et permis aux candidats et candidates de mieux avancer.

2 Critères d'évaluation

Le jury cherche à évaluer l'aptitude des candidates et candidats à réfléchir à un problème mathématique original. Quelques critères d'évaluation sont les suivants :

- *Créativité et tri des idées.* Chacun-e est libre d'aborder le problème comme il le souhaite. Bien sûr, il arrive de partir sur une fausse piste mais quelqu'un qui est capable de reconnaître et d'expliquer par lui-même une impasse mathématique est noté positivement. Il est très bien d'analyser plusieurs pistes et de garder plus d'une idée en tête, et la capacité à trouver un lien (précis) entre différentes idées est une compétence valorisée dans l'oral (la plupart des exercices posées requièrent plus d'une idée). En revanche, le fait de proposer de multiples idées vagues, sans les analyser, en attendant souvent une réaction du jury, n'est pas apprécié.
- *Autonomie.* Dans les oraux les mieux réussis, le jury intervient très peu. Presque tous les candidats ou candidates se trouvent bloquées dans leur réflexion, tôt ou tard ; c'est à elles et eux de vérifier qu'ils n'ont pas fait d'erreur de calcul ou de raisonnement, puis de chercher une piste alternative, par exemple d'étudier des cas particuliers simples pour développer une meilleure intuition du problème. De même, lorsqu'une ou un candidat aboutit à une conclusion partielle, il doit savoir vérifier qu'elle est compatible avec l'énoncé, et si ce n'est pas le cas, trouver son erreur sans aide du jury.

- *Connaissance du programme et aptitudes techniques.* La grande majorité des candidates et candidats maîtrise les notions du programme sur lesquelles elles ou ils sont interrogés. Si une candidate ou un candidat oublie une formule du cours, on s'attend à ce qu'il fasse l'effort de la retrouver à partir de résultats plus élémentaires. La seule occasion à laquelle une notion de cours a pu être rappelée par le jury est celle où une définition clé n'était ni connue, ni retrouvée (voir les remarques spécifiques plus bas) : bien entendu, cela a été sanctionné strictement. Nous espérons que les mêmes lacunes de cours ne seront pas répétées l'année prochaine. Lors de la conception des exercices, une attention particulière est mise sur le fait que la solution la plus naturelle n'utilise aucun résultat hors-programme. Néanmoins, si une ou un candidat propose une solution passant par un résultat hors programme, le jury demandera invariablement la démonstration du résultat en question, et en évaluera la clarté et la présentation au même titre que celles du reste de l'oral. Attention également au "faux hors-programme" : des résultats inventés et inventifs, souvent faux, ont été invoqués par quelques candidates ou candidats comme résultats hors-programme pour avancer dans leur exercice. Les futurs candidats et candidates sont vivement encouragées à maîtriser le programme parfaitement avant d'apprendre quoique ce soit en dehors du programme, dont une compréhension incomplète peut être très détrimentale.
- *Clarté et présentation.* La plus grande clarté est attendue des candidates et candidats. Il ne faut omettre aucun argument et mentionner chaque fois qu'une des hypothèses de l'énoncé est utilisée, même si cela semble aller de soi. Il est arrivé plusieurs fois qu'un cas particulier jugé par la ou le candidat trop facile pour être traité en détail, nécessite toute la fin de l'oral pour être résolu rigoureusement. Si la résolution d'un exercice passe par un calcul, on évalue aussi la capacité du candidat à présenter son calcul clairement et sans fautes.

Voir aussi la vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=rJd7szHnhHo>, sur le déroulement de l'épreuve.

3 Remarques spécifiques

- *Écoute des indications données.* Lorsque le jury demande au candidat ou à la candidate de vérifier un calcul ou de s'assurer que ce qui a été dit ne contredit pas les hypothèses du problème, c'est le plus souvent pour amener la candidate ou le candidat à corriger une erreur qui risque d'entraver par la suite du raisonnement. Il est arrivé plusieurs fois qu'une ou un candidat maintienne que ses résultats sont corrects sans même prendre le temps d'une vérification soigneuse. Le temps que la ou le candidat pense gagner est alors souvent perdu en confusion par la suite.
- *Lacunes par rapport au programme.* Plusieurs candidates ou candidats n'ont pas su dériver correctement la composition d'une fonction de deux variables avec le paramétrage d'un segment. L'étude et l'analyse d'intégrales (comme dans l'exercice 8 ci-dessous) a été nettement moins bien réussie que nous ne l'anticipions. Enfin, nous avons été très surpris par le nombre de candidates ou candidats qui ne savaient pas définir des structures algébriques usuelles : la définition d'un groupe a été souvent confondue ou mélangée avec celle d'un sous-groupe, le fait qu'un anneau ait une multiplication distribuant sur l'addition a été fréquemment oublié.
- *Réflexes mathématiques.* Nous avons été agréablement surpris par l'aisance de la plupart des candidates ou candidats sur les exercices portant sur des suites, des séries, ou des familles sommables. En probabilités, beaucoup de candidates ou candidats préfèrent une approche par l'analyse, la combinatoire et généralement le calcul. En général, on obtient cependant de meilleurs résultats en manipulant l'espérance à l'aide de ses propriétés connues (linéarité, positivité, etc.) plutôt qu'en l'écrivant systématiquement comme une somme sur les probabilités. En topologie (voir notamment l'exercice 2), les candidates ou candidats ont tendance à vouloir raisonner uniquement point par point (avec des choix d'éléments explicites) et n'ont pas le réflexe de travailler plus globalement avec des sous-ensembles ou même simplement des segments de $\mathbb{R}$.
- Un problème (voir l'exercice 6 ci-dessous) consistait à déterminer l'aire maximale d'un quadrilatère dont les longueurs des côtés sont fixées. Pour cela, il convient d'abord de justifier que la question a du sens : il s'agit de choisir une paramétrisation convenable de l'ensemble des quadrilatères considérés afin de voir le problème comme le calcul de la valeur maximale d'une fonction continue sur une partie compacte. Cette remarque s'applique plus généralement à

tous les problèmes d'extrémaux ; avant de chercher à calculer une quantité, il faut s'assurer qu'elle est bien définie.

4 Sujets

Nous nous sommes efforcés de proposer des sujets qui couvrent l'ensemble du programme, tout en essayant d'éviter les problèmes dont la résolution passerait par des idées trop classiques. Le plus souvent, les problèmes sont difficiles à résoudre en le temps de l'épreuve : quelques rares candidats et certaines candidates ont fini un exercice ou plus, mais bien plus nombreux sont celles et ceux qui ont très bien réussi leur oral en progressant vers une solution de l'exercice, mais sans parvenir à le finir pendant le temps imparti. Malgré les efforts du jury, le niveau de difficulté des exercices peut être assez variable. Le jury tient bien sûr compte de cette difficulté dans l'évaluation des candidates et candidats.

Une sélection d'énoncés conçus et utilisés cette année est disponible ci-dessous. Nous proposons ici un sous-ensemble représentatif, afin d'offrir aux lecteurs et lectrices de ce rapport un aperçu de la diversité et du niveau des sujets. Certains membres du jury maintiennent une liste plus complète des exercices qu'ils ou elles ont conçus sur leurs pages web professionnelles respectives. Pour les personnes qui souhaiteraient avoir accès à des problèmes posés les années précédentes ou à une liste plus exhaustive de problèmes, nous mentionnons aussi l'excellent travail de recueil d'énoncés fait pas la *RMS*.

Exercice 1. On fixe un espace euclidien E de dimension fini. Soit $S(E)$ l'espace des endomorphismes auto-adjoints de E . On dit que $A, B \in S(E)$ satisfont $A \geq B$ si $A - B$ est un endomorphisme positif.

1. Prouver que si $A \geq B > 0$, alors $A^{-1} \leq B^{-1}$; est-ce que on a toujours $A^2 \geq B^2$?

On dit que $f : S(E) \rightarrow S(E)$ est *convexe* si

$$f((1 - \alpha)A + \alpha B) \leq (1 - \alpha)f(A) + \alpha f(B)$$

pour tous $A, B \in S(E)$ positifs et pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$.

2. Montrer que la fonction $f(A) = A^r$ est convexe pour $-1 \leq r \leq 0$.

Exercice 2. Soit (G_n) une suite d'ouverts non-bornés supérieurement de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel $x_0 > 0$ tel que pour tout n , l'ensemble G_n contienne une infinité de points de la forme mx_0 , avec $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit (a_n) une suite décroissante de réels convergeant vers zéro.

1. Supposons que $\sum a_n = A$. Pour un sous-ensemble arbitraire $\nu \subset \mathbb{N}$, on définit la somme partielle associée à ν par

$$A(\nu) = \sum_{n \in \nu} a_n, \quad \text{avec convention } A(\emptyset) = 0.$$

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- a) Les sommes partielles $A(\nu)$ remplissent l'intervalle $[0, A]$;
- b) Pour tout entier n , on a

$$a_n \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

2. Supposons que $\sum a_n = +\infty$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ telle que

$$a_{n_k} < \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \sum a_{n_k} = +\infty.$$

La monotonie de la suite (a_n) est-elle nécessaire ?

Exercice 4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $f(x) = O(x)$ lorsque x tend vers 0 ;
2. Pour toute série réelle absolument convergente $\sum a_n$, la série $\sum f(a_n)$ est absolument convergente ;
3. Pour toute série réelle absolument convergente $\sum a_n$, la série $\sum f(a_n)$ est convergente.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) = \mathcal{O}(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$. On suppose que, pour toute suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge, la série $\sum f(a_n)$ converge également. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = C \cdot x \quad \text{dans un voisinage de } 0.$$

Exercice 6. Soient $a, b, c, d > 0$. On note $\mathcal{Q}_{a,b,c,d}$ l'ensemble des quadrilatères convexes que l'on peut former avec quatre côtés successifs de longueurs $a, b, c, d > 0$. Déterminer l'aire maximale d'un quadrilatère appartenant à $\mathcal{Q}_{a,b,c,d}$.

Exercice 7. Soit $p \in]0, 1/2[$. On considère $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = p$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer qu'il existe des constantes $c_1, C_1, c_2, C_2 > 0$ telles que :

$$C_1 \exp(-c_1 u) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 1} S_n \geq u\right) \leq C_2 \exp(-c_2 u),$$

pour tout $u \geq 0$.

Exercice 8. Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(1) = g(1) = 1$. On suppose de plus que $|f(x)| < 1$ pour $x \in [0, 1)$, et qu'il existe $C > 0$ et $M \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$1 - f(1 - x) \sim Cx^{1/M} \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0^+.$$

On pose

$$u_n = \int_0^1 g(x) f(x)^n dx, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Déterminer un équivalent de $(u_n)_{n \geq 1}$. Dédurre qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right| \leq \frac{C'}{n}, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Exercice 9. Soit $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré $n \geq 1$. On suppose que 0 est une racine de P de multiplicité $m < n$ et que les autres racines sont de module supérieur à 1. Soit $z \neq 0$ tel que $P'(z) = 0$. Donner une borne inférieure optimale pour $|z|$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $E = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Soient $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme à valeur dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On définit une opération $*$ sur E par

$$e_i * e_j = e_{\sigma_i(j)}.$$

Montrer que la probabilité que $(E, *)$ soit un groupe, sachant qu'il possède un élément neutre, tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Exercice 11. Soit A un anneau unitaire tel que tout $x \in A$ satisfait $x^2 = x$ ou bien est nilpotent. Montrer que tout élément $x \in A$ satisfait $x^2 = x$.

5 Répartition des notes

Coefficient pour l'admission (en % du total d'admission) :

- Concours MP : 30% (options physique et informatique).
- Concours MPI : 16.7% (option mathématiques) ou 22.2% (option informatique).

Pour le concours MP, la moyenne des 158 admissibles est de 13.0 avec un écart-type de 2.9. Pour le concours MPI, la moyenne des 68 admissibles est de 13.0 avec un écart-type de 3.1.

Les histogrammes ci-dessous présentent la répartition des notes obtenues par les élèves admissibles dans les concours MP et MPI.

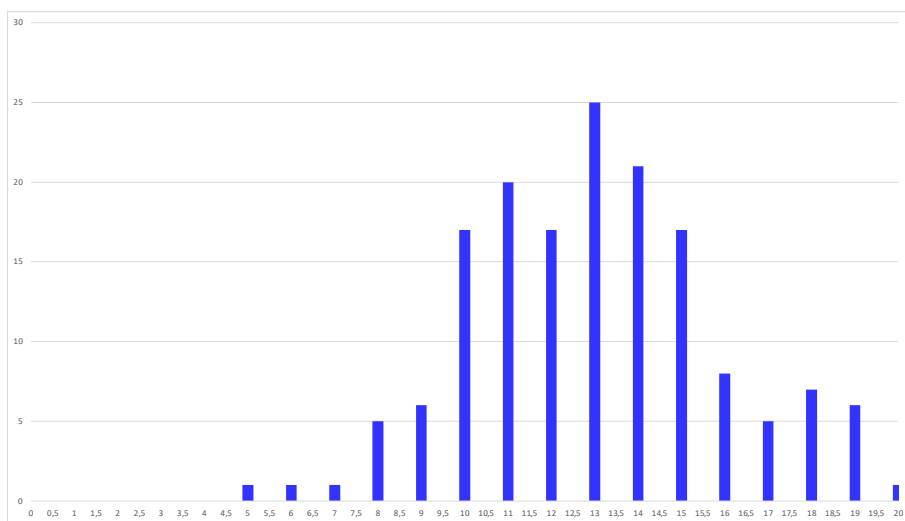


FIGURE 1 – Répartition des notes des 158 élèves admissibles au concours MP.

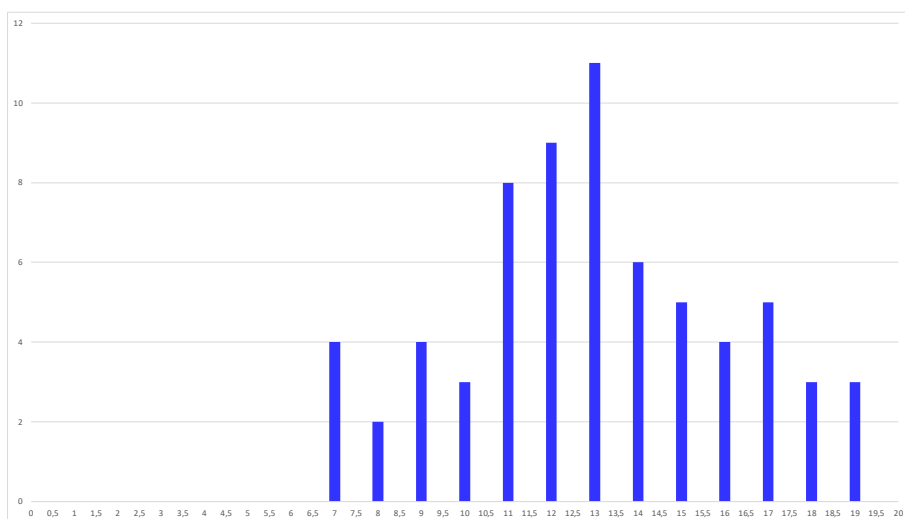


FIGURE 2 – Répartition des notes des 68 élèves admissibles au concours MPI.