Banques MP/MPI Inter-ENS – session 2025
Rapport relatif à l'épreuve orale de mathématiques ULSR

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  ENS (Paris), ENS de Lyon, ENS Paris-Saclay, ENS Rennes
- **Coefficients** (en pourcentage du total d'admission de chaque concours) **:**
  Le poids relatif de l'épreuve, c'est-à-dire son coefficient divisé par la somme totale des coefficients (écrits et oraux) pour chaque concours, est présenté dans le tableau ci-dessous. Abréviations : U = Ulm, L = Lyon, S = Paris-Saclay, R = Rennes.
  Certaines combinaisons banque-concours-option-école ne sont pas concernées par cette épreuve. Abréviation : N.C. = non-concerné.

Banque MP								
Concours MP								**Concours Info**
Option MP				**Option MI**				
U	**L**	**S**	**R**	**U**	**L**	**S**	**R**	**L**
15,00%	10,81%	15,38%	15,38%	10,00%	10,81%	15,38%	15,38%	11,27%

Banque MPI						
Option Math			**Option Info**			
U	**L**	**S**	**U**	**L**	**S**	**R**
16,67%	10,39%	12,82%	N.C.	11,27%	12,82%	N.C.

- **Membres du jury :**
  Clément Erignoux, Malo Jézéquel, Thomas Leblé, Benoit Loisel, Idriss Mazari, Angèle Niclas, Gabriel Pallier

Table des matières

1 Quelques données statistiques de la session 2025

Nous avons interrogé 505 candidat·e·s. Les notes s'étalent de 6 à 20 ; la moyenne est $12,03$; l'écart type est $2,98$; la médiane est 12. Une répartition plus précise des notes est donnée ci-dessous.

Note sur 20	**effectif en %**	**cumul en %**
$\leqslant 8$	$13,3$	$13,3$
9	$9,1$	$22,4$
10	$9,5$	$31,9$
11	$11,5$	$43,4$
12	$12,5$	$56,0$
13	$10,7$	$66,7$
14	$10,9$	$77,6$
15	$9,9$	$87,5$
16	$5,1$	$92,7$
17	$4,2$	$96,8$
$\geqslant 18$	$3,2$	100

2 Déroulement et nature de l'épreuve

2.1 Modalités

L'épreuve a une durée de 45 minutes, sans préparation, et se déroule au tableau. En début d'oral, le jury fait l'annonce suivante :

> *Cet oral va durer 45 minutes environ. Nous allons réfléchir à une ou plusieurs questions de difficulté variable. À chaque fois, l'exercice n'est qu'un prétexte à la discussion mathématique, et c'est elle qui compte. C'est tout à fait normal s'il y a des points délicats ou des difficultés.*

Après cette introduction, le jury énonce la première question. Les exercices comportent au moins deux questions, données au fur et à mesure, et très rarement plus de cinq. À l'issue du temps imparti, le jury indique clairement que l'épreuve est terminée.

Chaque exercice était donné en parallèle à un ensemble de quatre à six candidat·e·s, et ce pour deux « planches » consécutives, soit jusqu'à douze fois au total pour un exercice donné, après quoi il n'est plus jamais posé.

Il est possible d'assister aux oraux en s'enregistrant à l'avance sur une plate-forme dédiée. Il convient néanmoins de demander à la personne interrogée son accord avant d'assister à l'oral ; le jury demande confirmation de cet accord avant l'entrée en salle. Il est interdit de prendre des notes, et il est impératif de garder la plus grande discrétion.

2.2 Progression de l'oral

Le but de l'exercice pouvait être annoncé dès le début, sous une forme plus ou moins précise (exercice 24), en cours de route (exercice 12), voire pas du tout quand celui-ci faisait l'objet des dernières questions (exercices 10 et 11).

La première question portait presque systématiquement sur des notions proches du cours, ou avait pour but de faciliter l'appréhension des questions suivantes. Dans les rares situations où ce n'était pas le cas, un cas particulier ou une question proche plus abordable était proposée (exercice 5).

Les questions suivantes sont d'un abord moins familier, et requièrent souvent une certaine initiative de la part des candidat·e·s : cette initiative peut consister à traiter des cas particuliers, à commencer par résoudre la question sous des hypothèses plus fortes, ou à trouver une intuition géométrique à l'aide d'un dessin.

En début d'oral, le jury intervient généralement peu. L'initiative d'engager une discussion mathématique revient autant que possible aux candidat·e·s. À ce titre, il est fortement déconseillé de rester silencieux en attendant que le jury prenne la parole. Les interventions du jury se multiplient naturellement à mesure que l'oral avance, dans le but d'échanger avec la candidate ou le candidat une fois qu'elle ou il a présenté ses éléments de réponse. En fin d'oral, les candidat·e·s peuvent se voir demander de résumer ce qui a été fait, en particulier si le jury est beaucoup intervenu, et de proposer des pistes pour ce qu'il reste à faire.

Très rarement, un second exercice, plus court, a été posé à des candidat·e·s ayant terminé l'exercice principal. Des exemples se trouvent en section §5.3.

2.3 Usage du tableau

Le tableau est le support de l'énoncé mais aussi des résultats intermédiaires et des pistes explorées. Il est judicieux de demander avant d'effacer tout ou partie du tableau, en particulier parce que des résultats pourront resservir mais aussi pour permettre au jury de garder en vue pendant un temps raisonnable l'intégralité des arguments développés. Il est parfois préférable de barrer le résultat d'un calcul incorrect plutôt que de l'effacer trop vite.

Le jury conseille de noter au tableau l'ensemble des définitions, notations et formules clés de l'énoncé, ce qui permet non seulement de gagner en efficacité, mais aussi de lever d'emblée d'éventuelles ambiguïtés. Les candidat·e·s ayant préféré s'en remettre à leur mémoire ont souvent perdu un temps précieux à demander au jury de répéter certaines parties de l'énoncé.

Afin de faciliter l'interaction avec le jury, il est bon que les candidat·e·s écrivent lisiblement au tableau, et s'en écartent régulièrement. Certaines salles d'examen sont dotées de tableaux de taille très modeste par rapport à d'autres : le jury le sait et en tient compte.

3 Critères d'évaluation

3.1 Maîtrise de l'ensemble du programme

Toutes les notions figurant au programme sont susceptibles d'être évaluées : les candidat·e·s doivent notamment être capables d'en donner une définition précise, et sauf mention expresse dans le programme, toute démonstration du cours est exigible. En ce qui concerne les preuves les plus longues, le jury demandera rarement de les restituer, mais celles-ci sont souvent source d'inspiration pour la résolution des exercices. Par exemple, connaître la preuve du théorème spectral est une aide pour l'exercice 2, tandis que savoir montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers facilite la résolution de la première question de l'exercice 28. Certaines parties du programme ont paru dans l'ensemble insuffisamment maîtrisées (voir la section §4).

Dans une optique de préparation à l'épreuve, il est fondamental de maîtriser l'ensemble du programme et d'avoir à l'esprit un petit nombre d'exercices d'application directe. Dans cette optique, s'exercer sur les annales du concours permet de se familiariser avec l'esprit des exercices posés et de travailler les différentes techniques qui peuvent être valorisées. Mémoriser ces dernières sans recul, toutefois, a très peu d'utilité au regard de la variété des exercices proposés, d'autant plus que le jury accorde beaucoup d'attention à ce que les exercices du concours se distinguent complètement de ceux des concours précédents.

Quelques mots sur le hors-programme

Le jury prête une attention particulière au fait que chaque exercice puisse être entièrement résolu en restant strictement dans le cadre du programme. Si les candidat·e·s invoquent des notions ou des résultats hors-programme, le jury en demande une explication ou une démonstration dans les termes du programme. Une telle initiative est néanmoins très rarement souhaitable, en particulier quand elle est manifestement superflue. Dans ce cas, le jury pouvait la décourager en demandant de se replacer dans le cadre du programme.

3.2 Recul et maîtrise technique

Savoir jauger la difficulté d'un énoncé constitue une qualité essentielle pour l'oral. Par exemple, quand on procède par double implication ou double inclusion, il est très fréquent que l'une des deux directions soit plus facile ; l'identifier et la traiter rapidement pour se concentrer sur les difficultés réelles est un point positif.

Dans le même registre, il est très important de garder en vue l'ensemble des hypothèses données par l'énoncé. Le simple rappel par le jury d'une hypothèse sans laquelle il était impossible de conclure a parfois suffi à débloquer des candidat·e·s. À l'inverse, face à une difficulté, il est possible de commencer par traiter une question sous des hypothèses plus fortes si l'on croit que cela peut aider à se forger une intuition. Dans ce cas, le recul des candidat·e·s se mesure à la pertinence de l'hypothèse supplémentaire considérée, qu'il est bon de pouvoir motiver. Par exemple, dans l'exercice 31, il est naturel de commencer par traiter le cas où $\mathcal{A}$ est une algèbre de matrices car la question se reformule alors dans le cadre du programme d'algèbre linéaire (et se résout aisément).

Bien souvent, le recul et la maîtrise conceptuelle ne peuvent être évalués qu'à condition que les candidat·e·s possèdent une compétence technique suffisante. Les énoncés sont généralement conçus pour que les calculs n'occupent pas la plus grande partie de l'oral, mais cela suppose de faire preuve d'une certaine efficacité. Savoir mener une preuve par récurrence convaincante, déterminer les éléments propres d'une matrice 2×2, calculer des développements limités, procéder à une intégration par parties, développer et factoriser des expressions algébriques... sont autant de techniques classiques qu'il est impératif de savoir mettre en œuvre sans perdre inutilement du temps.

3.3 Autonomie et initiative

Le jury laisse toujours un temps de réflexion après avoir posé une question. Il est conseillé de faire usage de ce temps, sans crainte d'un instant de silence.

Face à une question identifiée comme difficile, il est attendu que les candidat·e·s proposent des pistes. Celles-ci doivent être à la fois spécifiques, constructives et réalistes. Par exemple, proposer de raisonner par récurrence sans plus d'explications est peu spécifique ; proposer des changements de variables au hasard est peu constructif. Faire une liste exhaustive de l'ensemble de ses connaissances sur un sujet donné ou proposer un catalogue de techniques n'est pas valorisé.

À l'inverse, indiquer qu'on souhaite utiliser un résultat du cours judicieusement choisi ou appliquer une stratégie connue qui permettrait de s'approcher de la solution, sera toujours apprécié. Le jury apprécie d'entrer dans une discussion mathématique avec les candidat·e·s qui prennent des initiatives mathématiques en formulant clairement les difficultés rencontrées, en mettant la question en rapport avec les autres, ou même en communiquant précisément sur leurs intuitions, et la discussion se révèle presque toujours fructueuse.

Le jury est conscient de la difficulté de certaines questions eu égard au temps limité de l'épreuve. Dans cette situation, c'est la capacité à mener la discussion ou à réagir aux indications qui sera évaluée, plus que la résolution complète et autonome.

3.4 Efficacité et avancement

Il arrive qu'un exercice soit terminé, auquel cas un second exercice est donné. C'est toujours bon signe. Cependant, certains exercices sont très longs et il n'est pas nécessaire d'en arriver au bout pour avoir une excellente note ; par ailleurs, l'avancement dans l'exercice n'est qu'un critère parmi d'autres. Le jury attache davantage d'importance à la profondeur des idées et aux techniques spécifiques proposées et appliquées par les candidat·e·s.

Toutefois, un certain dynamisme est apprécié. En particulier, une fois qu'une stratégie de résolution est identifiée, il est attendu qu'elle soit mise en œuvre de manière efficace. Le jury évalue la capacité à conclure ou détailler de manière efficace un argument une fois que toutes les idées sont là. À ce propos, il est bon d'avoir conscience que tous les arguments ne méritent pas le même niveau de détail : il n'est pas la peine de rédiger au tableau une récurrence immédiate, ni de répéter un argument semblable plusieurs fois. Une fois que les candidat·e·s ont gagné la confiance du jury en montrant leur capacité à gérer certains détails techniques, il est possible d'aller plus vite.

Le jury demande régulièrement de préciser ou de reformuler certains des arguments avancés. Cela ne signifie pas nécessairement qu'une erreur ait été commise, mais simplement que l'enchaînement de diverses étapes, qui ont pu être désordonnées par le processus normal de réflexion, nécessite une certaine remise en ordre de l'argumentaire.

3.5 Rigueur et honnêteté intellectuelle

Le jury attend bien évidemment un argumentaire mathématique rigoureux. Dessins, cas particuliers, procédés itératifs et autres heuristiques sont autant d'outils précieux pour aider à la résolution d'un exercice, mais ne sauraient remplacer une preuve. Lorsque les hypothèses ou conditions d'application d'un argument ne sont pas clairement formulées par les candidat·e·s, le jury demande systématiquement des précisions - l'honnêteté intellectuelle est alors capitale, et le « bluff » n'est jamais une stratégie payante. Enfin, dire quelque chose de faux n'est pas rédhibitoire - le jury laisse toujours une chance aux candidat·e·s de se reprendre. En revanche, la persévérance dans l'erreur, surtout si elle est grossière, laisse une mauvaise impression.

3.6 Qualité de l'exposition

La capacité des candidat·e·s à exposer clairement leurs idées et à accompagner le jury dans leur raisonnement, c'est-à-dire leur capacité à communiquer clairement la stratégie et les aspects techniques de la résolution, est évaluée. Une communication efficace repose sur un équilibre entre l'écriture au tableau et l'explication orale, et aucune de ces deux dimensions ne doit être négligée. Le tableau doit servir à écrire tous les points techniques essentiels, alors que l'oral peut typiquement servir à expliquer au jury la stratégie de résolution, ainsi que les détails des calculs qui ne méritaient pas d'être écrits au tableau.

Comme rappelé lors du court message d'introduction avec lequel le jury accueille les candidat·e·s, l'objectif est d'aboutir à une discussion mathématique, or celle-ci n'est possible que si certaines conditions élémentaires sont respectées : parler clairement, en regardant son interlocuteur, ne pas l'interrompre, etc. S'exprimer à voix trop basse ou ne jamais se tourner vers le jury constituent des maladresses qui entravent la discussion et font perdre, indirectement, des points.

4 Remarques spécifiques sur la session 2025

Cette année, le programme d'algèbre linéaire a posé quelques difficultés. Si la réduction des endomorphismes était globalement bien maîtrisée, le jury tient à rappeler que les exercices peuvent porter sur l'ensemble du programme de première année. Un exemple de point d'achoppement de cet ordre : une matrice carrée peut tout à fait représenter une application linéaire dans une base de départ et une base d'arrivée qui sont différentes a priori, c'est d'ailleurs un point essentiel y compris pour la réduction des endomorphismes et des matrices.

Le manque d'aisance avec certaines compétences techniques du programme d'analyse (en une ou plusieurs variables réelles) a pu faire perdre beaucoup de temps. On s'attend par exemple à ce que les candidat·e·s soient capables d'appliquer efficacement la méthode de variation de la constante.

Le jury a parfois été désagréablement surpris par l'absence de réflexes techniques relevant du programme de première année, notamment s'agissant de l'estimation fine d'intégrales, de théorèmes de prolongement par continuité, ou même de développements limités.

Le calcul différentiel en plusieurs variables a posé de grandes difficultés, les résultats et concepts de base n'étant dans l'ensemble pas maîtrisés. À titre d'exemple, la notion de différentiabilité semble être mal connue, et son utilisation pratique dans des développements d'ordre 1 plus délicate encore. On observe encore un nombre surprenant de candidat·e·s qui affirment que la différentiabilité est équivalente à l'existence de dérivées partielles Dans ce cas, le jury a fait remarquer l'erreur, sans toutefois exiger de contre-exemple. S'agissant de l'optimisation (avec ou sans contraintes), le jury note que si l'application de la règle des multiplicateurs de Lagrange est comprise, la vérification des hypothèses est parfois plus laborieuse. Enfin, écrire la matrice de la différentielle d'une application en fonction des dérivées partielles de ses composantes ne devrait pas poser problème.

Cette année, le jury a noté un progrès dans la préparation aux exercices de probabilité. Néanmoins, le jury s'étonne de l'absence de remise en question de la part de candidat·e·s qui ont pu trouver des valeurs négatives pour une variance, ou encore des probabilités strictement supérieures à 1. Le cours était dans l'ensemble bien maîtrisé, mais les candidat·e·s n'avaient pas toujours les bons réflexes. Par exemple, face à un calcul d'espérance, le réflexe premier a souvent été de la réécrire comme une somme en utilisant la formule de transfert, alors que dans de nombreux cas cela n'apporte rien et qu'il est plus judicieux d'essayer de travailler directement avec les variables aléatoires qui sont en jeu. Bien souvent, il était opportun d'introduire de nouvelles variables aléatoires, sans se limiter à celles proposées par l'exercice. C'est une technique encore trop peu maîtrisée.

5 Exemples d'exercices posés en 2025

Dans cette section, nous proposons trois listes d'exercices, tous posés lors de la session 2025. La première liste est accompagnée de commentaires [1] du jury, indiquant tantôt certaines

1. Nous faisons parfois suivre nos commentaires de quelques éléments de contexte afin de rappeler que les énoncés, si désincarnés qu'ils puissent paraître, émanent souvent de lemmes et autres créatures ayant une

attentes du jury, tantôt quelques écueils que les candidat·e·s ont pu rencontrer. La deuxième liste n'est pas commentée. La dernière liste recense des exercices plus courts, posés dans les rares cas où un premier exercice avait été entièrement résolu.

La transcription écrite des exercices ne permet pas toujours de restituer fidèlement le déroulement d'une épreuve orale. En particulier, certaines questions peuvent sembler excessivement difficiles si l'on faisait abstraction de la discussion qu'elles ont pu engendrer. À ce sujet, les potentielles indications n'ont été données par le jury qu'avec une certaine parcimonie, de manière adaptée à l'approche et aux notations des candidat·e·s. Pour ces raisons nous ne pourrons retranscrire ici l'ensemble des indications qui furent données, mais rappelons que les oraux sont publics. Parfois, les questions posées pouvaient dépendre du temps d'oral restant (exercice 10).

5.1 Exercices principaux, avec commentaires

Dans les commentaires ci-dessous, par souci de simplicité, nous utilisons « le candidat » ou « la candidate » comme termes génériques, sans préjuger du genre des personnes concernées.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ un entier supérieur ou égal à 2. On dit qu'une matrice carrée A de taille n à coefficients réels ou complexes ($A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) est de Bourdaud si ses coefficients diagonaux sont exactement les valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicité.

1. Justifier convenablement qu'une matrice à coefficients réels est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice de Bourdaud si, et seulement si, elle est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Une matrice symétrique complexe peut-elle être de Bourdaud sans être diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. On dit qu'une matrice A est normale si ${}^tAA = A{}^tA$. Décrire l'ensemble des matrices A à coefficients réels, normales, et de Bourdaud.

Commentaires : Dans cet exercice, l'énoncé introduit une définition nouvelle en lien avec certains éléments du programme. Il est attendu de la candidate de faire preuve d'une capacité d'adaptation à un contexte nouveau, et d'en identifier en premier lieu les enjeux. Ici, le décompte des valeurs propres avec multiplicité ne peut être qu'au sens des degrés dans le polynôme caractéristique, ou encore dans les dimensions des espaces propres. Les candidates qui ont pris un temps initial d'analyse de la définition ont pu avancer des idées substantielles sur l'exercice.

La première question permettait de se familiariser avec cette définition nouvelle. On attendait un énoncé clair des deux implications, ainsi que les énoncés du programme donnant directement chaque sens.

Dans la deuxième question, une prise de recul était nécessaire. Les candidates qui se sont immédiatement lancées dans des calculs en coefficients $n \times n$ n'ont pas pu élaborer une stratégie permettant d'exhiber efficacement un contre-exemple. L'étude de cas en petite dimension permettait de mieux appréhender les enjeux de l'exercice.

La troisième question demandait davantage d'initiative et a pu donner lieu à une discussion mathématique permettant d'étudier, en premier abord, certains cas particuliers, tels que celui des matrices symétriques réelles.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. Soient $A, B \in \mathscr{A}_{2n}(\mathbb{R})$ deux matrices antisymétriques réelles et $C = AB \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On s'intéresse aux racines réelles de χ_C.

existence mathématique hors du concours des ÉNS. Dans ces paragraphes, nous nous permettons l'usage de termes hors programme.

1. Donner un exemple d'un entier $n \geqslant 1$ et de matrices antisymétriques $A, B \in \mathscr{A}_{2n}(\mathbb{R})$ telles que χ_C n'admet pas de racines réelles.
2. Dans cette question uniquement, on suppose que A est inversible et on identifie le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{2n}$ à celui des matrices colonnes $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. On définit une application $\mathbb{C}$-bilinéaire :
$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} & \to & \mathbb{C} \\ & (X, Y) & \mapsto & X^T A^{-1} Y \end{array}$$
On rappelle qu'on a posé $C = AB$. Montrer que les sous-espaces caractéristiques (complexes) de C sont 2 à 2 Φ-orthogonaux, c'est à dire que si $X, Y \in \mathbb{C}^{2n}$ sont des vecteurs contenus dans des sous-espaces caractéristiques distincts de C, alors $\Phi(X, Y) = 0$.
3. Montrer que les racines réelles de χ_C sont toutes d'ordre pair (on ne suppose plus nécessairement que A est inversible, mais on pourra bien sûr commencer par traiter ce cas particulier).

Commentaires : Dans la première question, il était attendu du candidat qu'il commence par expérimenter des petites valeurs de n pour se familiariser avec l'exercice. Cela amène naturellement à des études de matrices par blocs. Le jury s'étonne que certains candidats se soient retrouvés en difficultés dans des calculs de produits de matrices par blocs ou de polynômes caractéristiques en dimension 4.

Dans la deuxième question, le jury n'attendait aucune connaissance des formes symplectiques, mais plutôt que les candidates adaptent les démonstrations bien connues dans le cadre des produits scalaires à ce nouveau contexte. La maîtrise de la définition de sous-espace caractéristique est un attendu du programme qui a mis en difficulté de nombreux candidats.

Seuls quelques candidats très bien préparés ont su proposer des pistes pertinentes dans la troisième question.

Exercice 3. Soit $f(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k$ pour $z \in \mathbb{C}$ une série entière de la variable complexe. On pose $f'(z) = \sum_{k \geqslant 0} (k+1) a_{k+1} z^k$ qu'on appelle la série entière dérivée de f. On suppose que

— $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$;

— f est de rayon de convergence infini ;

— pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, il existe au moins un antécédent z de ω par f tel que $f'(z) \neq 0$.

On admet qu'une telle série entière existe [2]. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par
$$F(M) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k M^k$$

1. Justifier que F est bien définie, continue et qu'elle induit une surjection de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui-même.
2. Montrer que si $n = 2$, alors F est surjective.
3. Généraliser en dimension supérieure.

Commentaires : Les deux premières questions invitaient les candidates à revisiter la méthode de construction de l'exponentielle de matrices dans un cadre plus général. La deuxième question pouvait orienter les candidates dans la résolution de la troisième question, qui invite à mener des décompositions suivant les sous-espaces caractéristiques. L'hypothèse $a_1 \neq 0$ était ici superflue mais pouvait mettre les candidates sur la voie de la résolution de la troisième question.

2. C'est par exemple le cas de $z \mapsto z \exp(z)$, de sorte que l'exercice ne porte pas uniquement sur les applications linéaires $z \in \mathbb{C} \to a_1 z \in \mathbb{C}$.

Certaines candidates se sont aventurées à utiliser des résultats hors programme, tels que la réduction de JORDAN, de FROBENIUS ou la décomposition de DUNFORD. Ces pistes se sont systématiquement avérées infructueuses et n'ont pas permis de simplifier significativement les enjeux de l'exercice. Le jury tient à rappeler qu'il veille à ce que les exercices puissent toujours être résolus strictement dans le cadre du programme.

Exercice 4. On considère l'ensemble suivant de triplets d'entiers naturels non nuls :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \text{ et } x \leqslant y \leqslant z\}$$

1. Quels sont les éléments de $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ tels que $x = y$ ou $y = z$?
2. Montrer que $\mathcal{S}$ a une infinité d'éléments de la forme $(1, y, z) \in \mathcal{S}$.
3. On définit deux applications

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \to & \mathbb{Z}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (y, z, 3yz - x) \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \to & \mathbb{Z}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, z, 3xz - y) \end{array} \right.$$

Montrer que tout élément $s \in \mathcal{S}$ est de la forme

$$s = f^{d_1} \circ g^{e_1} \circ \cdots \circ f^{d_n} \circ g^{e_n}(1, 1, 1)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $d_i, e_i \in \mathbb{N}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Commentaires : La première question invitait à mener un raisonnement élémentaire par analyse-synthèse qui faisait apparaître des équations polynomiales de degré 2 en 1 variable, mais également quelques techniques d'arithmétique élémentaire. Le jury s'étonne du nombre de candidats qui se sont trouvés en difficulté pour justifier que $x^2|y^2 \Rightarrow x|y$, ou encore pour déterminer la liste exhaustive des diviseurs entiers du nombre 2.

La deuxième question invitait les candidats à faire apparaître des identités remarquables usuelles afin de ramener le problème à l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence. Curieusement, certains candidats ont été en difficulté pour justifier la stricte croissance de la suite définie par $u_{n+1} = 3u_n - 1$ et $u_0 = 1$.

La troisième question n'a été convenablement abordée que par les candidats les mieux préparés.

Exercice 5. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ dont le gradient est μ-Lipschitz pour un certain $\mu \in [0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$ et qu'elle n'admet que des points critiques isolés au sens suivant : C_f désignant l'ensemble des points critiques de la fonction f, pour tout $z \in C_f$ il existe $r > 0$ tel que $B(z, r) \cap C_f = \{z\}$. On considère une initialisation $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et, un pas $\tau > 0$ étant fixé, la suite

$$x_{k+1} = x_k - \tau \nabla f(x_k).$$

Démontrer que, si τ est suffisamment petit, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On commencera par le cas $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ (ici $d = 1$).

Commentaires : Une trame possible était la suivante :

1. Démontrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée pour τ suffisamment petit. Ce point a posé des difficultés majeures, dans le cas multi-dimensionnel comme dans le cas unidimensionnel (même quand le jury a proposé de supposer f C^2 de dérivée seconde uniformément bornée). Cela était le plus souvent lié à un manque de pratique des développements asymptotiques des fonctions. En particulier, le fait que la formule de Taylor avec reste intégral permette un contrôle plus fin des erreurs qu'un développement limité d'ordre 1 était peu clair.

2. Ensuite, d'observer que $\|x_{k+1} - x_k\| \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Démontrer cela supposait d'avoir bien manipulé les développements limités.
3. Déduire du point précédent que la suite ne possède qu'une ou une infinité de valeurs d'adhérence, et utiliser le caractère isolé des points critiques pour conclure à l'unicité des valeurs d'adhérence.
4. Enfin, de conclure par l'équivalence, pour les suites à valeurs dans un compact, entre convergence et unicité de la valeur d'adhérence.

Cet exercice a donné lieu à un florilège d'erreurs élémentaires en calcul différentiel, et n'a globalement pas été bien réussi, à l'exception des candidats les mieux préparés qui ont réussi à comprendre les enjeux analytiques du résultat. Un nombre restreint de candidates a réussi à obtenir la décroissance de la suite $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans le cas multi-dimensionnel. Notons enfin que certains candidats ont donné l'impression de chercher à se rappeler la solution d'un exercice qu'ils auraient vu et portant sur la descente de gradient. Malgré les remarques du jury, certains candidats se sont obstinés dans cette direction, ce qui s'est reflété dans la qualité de leur prestation. Au risque de nous répéter, rappelons que l'oral n'est pas (qu')un exercice de mémoire, et que les remarques du jury ne sont pas là pour déstabiliser les candidats.

Exercice 6. Dans tout ce qui suit, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. qui s'annule en un point $x^* \in \mathbb{R}$. On suppose que $f'(x^*) \neq 0$. On considère un point $x_0 \in \mathbb{R}$, et l'on définit la suite des itérations de Newton par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

1. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in]x^* - \varepsilon; x^* + \varepsilon[$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers x^*.
2. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ définie par

   $$\forall x \in \mathbb{R}\,, f(x) = e^x - 1.$$

   On veut appliquer la méthode de Newton à la fonction f et, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des points fournis par la méthode de Newton. Pour quelles données initiales x_0 la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle stationnaire à partir d'un certain rang ?
3. Soit $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ une fonction strictement convexe telle que f' ne s'annule pas et telle que $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite générée par l'algorithme de Newton issue d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ converge en un nombre fini d'étapes si, et seulement si, $f(x_0) = 0$.
4. On considère une méthode de quasi-Newton en dimension supérieure pour la localisation de points critiques. On considère une fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2 ainsi qu'un point $x^* \in \mathbb{R}^d$ tel que

   $$\nabla\varphi(x^*) = 0.$$

   On suppose que $H_\varphi(x^*) \in S_d^{++}(\mathbb{R})$ et on considère une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S_d^{++}(\mathbb{R})$. On considère la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $x_0 \neq x^*$ et

   $$x_{k+1} := x_k - M_k^{-1}\nabla\varphi(x_k).$$

   On suppose qu'il existe un voisinage D de x^* tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $x_k \in D$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $x_k \neq x^*$. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge super-linéairement vers x^* au sens où

   $$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

(b) On a

$$\frac{\|(M_k - H_\varphi(x^*))(x_{k+1} - x_k)\|}{\|x_{k+1} - x_k\|} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Ici, H_φ désigne la hessienne.

Commentaires : L'énoncé initial menait en fait à l'étude des méthodes de type quasi-Newton mais cette question n'a été abordée par aucune candidate. La première question, qui n'est jamais que l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1, a posé des difficultés inattendues. Le jury a été désagréablement surpris par de nombreux manques méthodologiques et, à l'exception d'un nombre restreint de candidats, les outils élémentaires d'analyse réelle ont été mal maîtrisés ou utilisés. Les questions 2 et 3 ne posaient aucune difficulté particulière, et, quand elles ont été traitées, elles ont été globalement bien traitées.

Exercice 7. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On appelle *similitude* de $\mathbb{R}^n$ un endomorphisme de la forme hu, où h est une homothétie non nulle et $u \in O(n)$. Étant donnée g une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit son *laplacien*

$$\Delta g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}.$$

1. On suppose dans cette question $n = 2$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f = (f_1, f_2) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. On suppose que la différentielle de f est partout une similitude. Montrer que Δf_1 et Δf_2 sont identiquement nulles sur Ω.
2. Ce résultat perdure-t-il quand $n = 3$?

Commentaires : Cet exercice, qui demandait une maîtrise minimale des notions de calcul différentiel au programme, a posé des difficultés tout à fait considérables. Dans la première question, la forme des éléments de $O_2(\mathbb{R})$ (qui constitue un passage obligé pour répondre à la question) a été difficile à mobiliser, quand elle était connue. Il était concevable que la seconde question (avec sa forme ouverte, mais dont la réponse s'avère négative) puisse poser quelques difficultés, mais même après une phase de recherche, une fois mis en face du contre-exemple constitué par $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, le calcul de la différentielle de f au point $(1, 0, 0)$ s'est révélé insurmontable pour les candidats.

Le lemme de Schwarz et ses hypothèses n'ont pas posé de problème.

Contexte : Le coeur de la question 1 est l'obtention des équations de Cauchy-Riemann pour les applications conformes, ou (anti)-holomorphes d'une variable complexe, dont la connaissance n'est absolument pas requise pour la préparation au concours. On doit à Liouville la compréhension du fait que les applications suffisamment régulières dont la différentielle est une similitude ont un comportement radicalement différent à partir de la dimension 3.

Exercice 8.

1. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\lim_{t\to+\infty} \big(f''(t) + f'(t) + f(t)\big) = 0$. Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$

2. étant donné $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré 1 ou 2 à racines simples, et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose

$$\partial_P f(x) = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k f^{(k)}(x),$$

où a_k est le coefficient de degré k dans P. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que pour toute f dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\partial_P f =_{+\infty} o(1) \implies f =_{+\infty} o(1)$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour toute $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 qu'on écrit

$$F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \text{ si } \quad \begin{cases} x'(t) + ax(t) + by(t) + cz(t) \to 0 \\ y'(t) + cx(t) + ay(t) + bz(t) \to 0 \\ z'(t) + bx(t) + cy(t) + az(t) \to 0 \end{cases}$$

quand $t \to +\infty$, alors $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

Commentaire : Des candidates sont arrivées à la fin de la question 3 ; toutes maîtrisaient la méthode de variation des constantes.

Quand la question 1 était trop difficile, il a pu être demandé de montrer que si f est C^1 et $f' + f \to 0$ au voisinage de $+\infty$ alors $f \to 0$ au voisinage de $+\infty$, puis de revenir à la question initiale.

Dans la question 2, la condition demandée portait plus précisément sur les racines de P (et ne s'exprime pas, au degré 2, de manière simple sur les coefficients) ; cela a été précisé si besoin.

Exercice 9. Soit n un entier naturel non nul et A un anneau commutatif. On note

$$\Sigma_n(A) = \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \colon (x_1, \ldots, x_n) \in A^n\}.$$

1. Montrer que $\Sigma_2(A)$ est stable par multiplication.
2. $\Sigma_3(A)$ est-il stable par multiplication ?

Soit k un corps tel que $1 + 1 \neq 0$ dans k. On suppose à présent que n est une puissance de 2.

3. Soit $s = c_1^2 + \cdots + c_n^2$ avec $c_i \in k$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(k)$ telle que $M\,{}^tM = {}^tMM = sI_n$ et la première ligne de M est $(c_1, \ldots, c_n)$.

Les questions suivantes n'ont pas été abordées.

4. En déduire que $\Sigma_n(k)$ est stable par multiplication, puis que $\Sigma_n(k) \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de k^*.
5. Un théorème dû à Hurwitz affirme la chose suivante : *Soit n un entier naturel non nul. S'il existe des fonctions $z_1, \ldots, z_n$ bilinéaires sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = z_1(x,y)^2 + \cdots + z_n(x,y)^2,$$

alors $n \in \{1, 2, 4, 8\}$. Expliquer pourquoi le théorème d'Hurwitz n'entre pas en contradiction avec ce qu'on a montré dans cet exercice.

Commentaires : En accord avec le programme, les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année (excluant donc la réduction des endomorphismes) peuvent être réquisitionnées en seconde année et au concours sur tout corps de base. Dans la question 3, l'hypothèse que $1 + 1 \neq 0$ dans k était superflue, mais le jury a considéré que traiter ce cas un peu spécial à part (comme il se doit en principe) n'aurait pas mené à des discussions particulièrement intéressantes ; il était toutefois pertinent de noter à quel stade de la résolution on le mettait vraiment de côté pour de bonnes raisons.

Les deux premières questions furent relativement bien abordées ; dans la question 1, le recours aux nombres complexes (qui n'était pas obligatoire) n'a pas été systématique. Dans la question 3, des candidates ayant en tête le cas $k = \mathbb{R}$ pensèrent à compléter la première ligne

en un multiple d'une matrice orthogonale. Cette approche, qui n'était pas celle attendue, peut fournir une réponse dans le cas où $k = \mathbb{R}$, mais elle fut découragée une fois remarquée, car l'enjeu central de l'exercice (appelé à devenir manifeste dans l'une des questions suivantes qui n'a pu être donnée, mais sensible dès la question 3), était d'établir la stabilité par multiplication de $\Sigma_n(k)$ quand n est une puissance de 2 sans guère de restriction sur k ; or ceci ne constitue pas vraiment un problème dans le corps $k = \mathbb{R}$, car $\Sigma_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ pour tout $n \geqslant 1$; plus généralement, ce n'est pas un problème dans les corps (comme $\mathbb{R}$ ou encore $\mathbb{C}$) où les sommes de deux carrés sont elles-mêmes des carrés. En toute généralité, il convenait de procéder par récurrence sur p tel que $n = 2^p$, la question 2 constituant le cas $p = 1$, et cela fut correctement appréhendé ; cela menait naturellement à des calculs de produits de matrices par blocs. Le cas de l'hérédité où $c_1^2 + \cdots + c_{n/2}^2 = 0$ était un peu plus délicat et n'a pas pu être entièrement traité.

Contexte : La question 1 (c'est-à-dire le cas $n = 2$) repose sur l'identité dite de Fibonacci [3], de Diophante ou de Brahmagupta, et elle est liée à l'existence du corps $\mathbb{C}$. La question 3 est l'amorce d'une preuve du théorème de Pfister sur les sommes de carrés, qui dit que $\Sigma_n(k)$ est stable par multiplication quand n est une puissance de 2. Le cas $n = 4$ de ce théorème est un corollaire de l'identité des quatre carrés d'Euler (1748) liée à l'existence des quaternions, le cas $n = 8$ de l'identité des huit carrés de Degen (1818), et le cas $n = 16$ de l'identité des seize carrés de Pfister, indépendamment découverte par Pfister d'une part, Eichhorn et Zassenhaus d'autre part, autour de 1965.

Exercice 10. Soit A une matrice 2×2 de déterminant 1 à coefficients entiers. On pose $\gamma = \mathrm{tr}(A)$, et on suppose que $\gamma > 2$. On appellera un groupe G *abélien* si pour tous $g, h \in G$, on a que : $gh = hg$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} A^k & \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right)$$

   avec $k \in \mathbb{Z}$ et $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, forme un groupe. On nommera ce groupe G_A. Est-il abélien ?

2. Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupe injectif qu'on explicitera de G_A vers le groupe

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (On admettra que S est un groupe lui aussi.)

Dans la suite, la candidate pourra si elle le souhaite désigner les éléments de G_A sous la forme (k, U) où $k \in \mathbb{Z}$ et U est le vecteur colonne de coordonnées $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, et les éléments de S sous la forme $[t, X]$ où $t \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur colonne de coordonnées (x, y).

On note à partir de maintenant D_A le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$ dans G_A.

3. Montrer que D_A est abélien.

3'. Montrer que

$$D_A = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_2 & \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right) : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in (I_2 - A)(\mathbb{Z}^2) \right\}.$$

3. On la trouve dans le *Livre des carrés* (1225).

Les questions suivantes n'ont pas été abordées.

4. Soit B une matrice 2×2 de déterminant 1 à coefficients entiers, et de trace > 2. Montrer que si les groupes G_A et G_B sont isomorphes, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.
5. Soient ϕ_A, ϕ_B des homomorphismes injectifs de G_A et G_B dans S tels que $\phi_A(1,0)$ et $\phi_B(1,0)$ sont diagonales [4]. Montrer que pour tout isomorphisme

$$\psi\colon G_A \to G_B$$

il existe un automorphisme $\Psi : S \to S$ tel que $\Psi \circ \phi_A = \phi_B \circ \psi$.

Commentaire : Cet exercice était relativement long. La question 3 fut donnée sous sa forme 3 ou 3' en fonction du temps qu'il restait ; la question 3' était en fait une préparation pour les questions suivantes, qui ne purent être abordées.

Les questions 1 et 2 furent résolues plus ou moins efficacement. Diagonaliser A n'était vraiment requis qu'à partir de la question 2, mais cela pouvait servir à montrer que G_A est non abélien dans la question 1 ; toutefois, cela n'était en aucun cas suffisant. Le morphisme construit à la question 2 n'est pas unique, il n'était pas demandé de trouver tous les tels morphismes, ce qui est faisable dans le cadre du programme mais long et peu adapté à un oral. Rappelons plus utilement que

— pour montrer qu'un ensemble est un groupe, il est souvent commode de l'identifier comme sous-groupe d'un groupe connu (en l'occurrence, il était inutile de redémontrer l'associativité du produit matriciel à la question 1) ;

— pour montrer qu'un morphisme de groupes est injectif, il convient de regarder son noyau.

Les points précédents devraient faire partie des réflexes, cela n'a pas toujours été le cas.

Contexte : Les groupes étudiés dans cet exercice font partie d'une classe de groupes appelés polycycliques ; quant au groupe S qui apparaissait dès la question 2, il s'agit d'un groupe de Lie résoluble revêtant l'une des huit géométries modèles intervenant dans l'énoncé de la conjecture de géométrisation de Thurston.

Exercice 11. Dans cet exercice, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ désignera l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients entiers relatifs et de déterminant 1 ou -1. On considère la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et l'ensemble $C_H = \{R \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) : RH = HR\}$.

1. Montrer que C_H est un groupe infini (pour le produit matriciel).
2. Montrer que $C_H = \mathbb{Z}[H] \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}[H]$ désigne $\{xI_2 + yH : (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$.
3. Montrer que C_H est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et donner un système de générateurs de C_H.

Les questions suivantes n'ont pas été abordées.

4. Expliciter une bijection entre C_H et l'ensemble des solutions de

$$u^2 - 5v^2 = \pm 4,\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2. \tag{P}$$

En déduire l'ensemble des solutions de (P).

4. Cette dernière condition n'est en réalité pas nécessaire.

5. On considère l'anneau $A = \{s + t\sqrt{5} \colon (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ (on admet que c'est un anneau). Montrer que le groupe des inversibles $A^\times$ est égal à

$$\{s + t\sqrt{5} \colon s^2 - 5t^2 = \pm 1\}$$

puis qu'il est isomorphe à $F \times \mathbb{Z}$, où F est un groupe cyclique à préciser.

Commentaire : Des candidats étonnèrent quelque peu le jury en écrivant d'emblée les contraintes vérifiées par les éléments de C_H en termes de relations vérifiées par leurs coefficients. Cela n'est pas utile pour la question 1, mais fut gardé dans un coin du tableau, car il s'avère que cette démarche peut servir dans une approche élémentaire de la question 2. En fait, le but de cet exercice (qui n'a pu être annoncé) était une application à la théorie des nombres, notamment la résolution d'une équation de type Pell $u^2 - 5v^2 = \pm 4$ après passage aux coefficients mais, dans l'esprit de l'exercice, seulement une fois assez de connaissance sur C_H acquise. L'approche élémentaire mentionnée plus haut n'était donc pas complètement infondée en principe, mais se heurtait ensuite de plein fouet à la difficulté de cette équation, notamment à la question 3 qui gagnait vraiment à être abordée telle qu'elle est, c'est-à-dire comme une question de théorie des groupes, les notions au programme sur les matrices symétriques réelles pouvant également être pertinentes une fois observée l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Le groupe C_H est engendré par les éléments $-I_2$ et $H - I_2$ (qui est la racine carrée symétrique définie positive de H) ; une fois cet ensemble de deux générateurs conjecturé, il s'agissait de développer un algorithme permettant de montrer que tout élément de C_H est bien produit de ces générateurs ou de leurs inverses.

Des candidats visiblement bien préparés et ayant résolu rapidement les questions 1 et 2 à l'aide de la réduction des endomorphismes rencontrèrent de grandes difficultés à la question 3, où l'algèbre linéaire leur fut d'un moindre secours.

Contexte : H est une matrice dite hyperbolique. Le groupe C_H est un centralisateur. Le fait que C_H soit isomorphe au produit d'un groupe fini et de $\mathbb{Z}$ est lié au théorème des unités de Dirichlet.

Exercice 12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f \colon E \to E$ une application telle que $f(0) = 0$ et pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. On introduit, pour tous $x, y \in E$,

$$\delta_f(x,y) = \left\| \frac{f(x) + f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\|$$

qu'on appelle le défaut de f (en x et en y).

1. Montrer que $\delta_f(x,y) \leqslant \frac{1}{2}\|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$.
2. Montrer que f a un défaut identiquement nul si et seulement si elle est linéaire.

On fait à partir de maintenant l'hypothèse supplémentaire que $f \colon E \to E$ est surjective, et on cherche à montrer qu'elle est linéaire.

3. Pourquoi l'hypothèse de surjectivité de f est-elle nécessaire ? On pourra considérer un cas où E n'est ni de dimension finie, ni préhilbertien.

Étant donnés x et y dans E, on pose $p \in E$ le milieu de $f(x)$ et de $f(y)$ et $\sigma \colon E \to E$ la symétrie centrale de centre p, i.e. $\sigma(z) = 2p - z$ pour tout $z \in E$. On pose $g = f^{-1} \circ \sigma \circ f$.

4. Montrer que $\delta_g(x,y) = 2\delta_f(x,y)$.

La question suivante n'a pas été abordée.

5. Conclure.

Commentaires : Pour aborder la question 3 dans de bonnes conditions, il fallait connaître quelques exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie non préhilbertiens (un espace de suites réelles bornées muni de la norme sup pouvait faire l'affaire). La question 4 a été donnée, mais ne fut pas résolue dans le temps de l'oral.

Contexte : Le résultat final visé dans cet exercice est le théorème de Mazur-Ulam (dans le cas d'un même espace de départ et d'arrivée), qui constituait une réponse à une question de Banach. La preuve proposée ici (notamment à la question 4) suit une idée de Väisälä (2003).

Exercice 13. Soit f une application Lipschitzienne de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que $f(x) = 0$ si $x \in \mathbf{R} \setminus [-R, R]$.

1. Montrer que la limite
$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x \right)$$
existe. On notera cette limite
$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y) \ln|x-y| \mathrm{d}y + \int_{x}^{+\infty} f(y) \ln|x-y| \mathrm{d}y.$$
Montrer que l'application Tf est bien définie. Montrer que si f est C^1 alors Tf est dérivable et pour $x \in \mathbb{R}$ on a
$$(Tf)'(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-y)}{y} \mathrm{d}y.$$

3. Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai sans supposer que f est C^1 (elle est toujours Lipschitzienne cependant).

Commentaires : Les deux premières questions testaient l'aisance des candidates avec la partie du programme sur l'intégration sur un intervalle quelconque (en particulier, la notion d'intégrabilité et le théorème de dérivation sous l'intégrale). Si l'intégrabilité en 0 du logarithme n'est pas au programme, il nous semble raisonnable d'attendre des candidats d'être capables de retrouver ce résultat rapidement. Dans la deuxième question, remarquer que la théorème de dérivation sous l'intégrale ne s'applique pas à l'expression définissant Tf pouvait aider les candidates à penser à changer de variable dans cette expression.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose
$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}).$$

1. Quelle est la limite de S_n ? Que dire de la vitesse de convergence ?
2. Jusque la fin de l'exercice, on suppose que f est 1-périodique. On suppose f de classe C^2. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 1$ on a $|S_n - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t| \leq C/n^2$.
3. On suppose que f est C^3. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 1$ on a $|S_n - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t| \leq C/n^3$.

Commentaires : Si nécessaire, nous avons orientés les candidats vers la méthode des trapèzes pour la question 2. Certains candidats ont pensé d'eux mêmes à utiliser la formule de Taylor reste intégrale, ce qui leur a permis de résoudre rapidement les questions 2 et 3 (et de généraliser le résultat de la dernière question au cas d'une fonction $C^k, k \in \mathbb{N}$).

Exercice 15. Soit p un nombre premier.

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $x \in \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un unique $y \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ tel que pour tout $a \in \mathbb{Z}$ si la réduction modulo p^{n+1} de a est x alors la réduction modulo p^n de a est y. On notera $y = x \mod p^n$.

On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ pour lesquels $x_n = x_{n+1} \mod p^n$ pour tout $n \geq 1$. On définit l'addition et la multiplication sur $\mathbb{Z}_p$ terme à terme.

2. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un anneau commutatif intègre.
3. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}_p$.
4. Soit $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers. On lui associe une application polynômial $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ par $Q(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ pour $x \in \mathbb{Z}_p$. On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $Q(b) = 0 \mod p$ et $Q'(b) \neq 0 \mod p$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}_p$ tel que $Q(x) = 0$.

Commentaires : Cet exercice (en particulier la première question) a mis en avant les difficultés de certains candidats avec la définition (et *a fortiori* la manipulation) des anneaux quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans la deuxième question, on admettait que $\prod_{n\geq 1}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ est un anneau (pour l'addition et la multiplication terme à terme), ce qui permettait de montrer que $\mathbb{Z}_p$ en est un sous-anneau. La question 4 est un cas particulier du lemme de Hensel, une version algébrique de la méthode de Newton.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < +\infty$. On définit la transformée de Fenchel de f, notée $f^\star$, comme la fonction $f^\star : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^\star(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (xy - f(x)) .$$

1. Montrer que $f^\star$ est convexe.
2. Supposons que f est convexe et dérivable. Montrer que $f^{\star\star} = f$.
3. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, convexe, que $f'' > 0$, et que

$$\frac{f(x)}{|x|} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Montrer que $f^\star$ est dérivable, et que

$$y = f'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = (f^\star)'(y).$$

Commentaires : En question 1, on attendait du candidat qu'il vérifie également la bonne définition de $f^\star$, ce qui a été fréquemment omis. Pour la question 2, après quelques tentatives infructueuses et des manipulations parfois incorrectes des bornes supérieures, plusieurs candidates ont proposé d'elles-mêmes de démontrer séparément les inégalités $f^{\star\star} \leq f$ et $f \leq f^{\star\star}$. La première se montrait assez directement, tandis que la seconde se révélait plus subtile. Une indication était alors donnée, suggérant de traiter des cas particuliers simples ; on attendait notamment que la candidate envisage le cas d'une fonction affine. Les bons candidats ont ensuite su établir le lien avec le cas général. En question 3, peu de candidates ont remarqué que la borne supérieure pouvait en réalité être atteinte, c'est-à-dire qu'il s'agissait d'un maximum ; un rapide dessin pouvait ici permettre de mieux visualiser la situation.

Exercice 17. 1. Soit $\ell > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_0^\ell \exp\left(\mathrm{i}xt + \mathrm{i}\frac{t^3}{3}\right) \mathrm{d}t$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}xt + \mathrm{i}\frac{t^3}{3}\right) \mathrm{d}t$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

3. Proposer une équation différentielle vérifiée par f.

Commentaires : Si la question 1 ne devait normalement poser aucun problème aux candidats, beaucoup n'ont pas remarqué qu'elle pouvait se révéler utile pour aborder la question 2. Pour cette dernière, l'idée de procéder par intégration par parties (IPP) est apparue assez rapidement dans les propositions des candidates, et plusieurs choix d'IPP pouvaient convenir. Le plus souvent, les candidates ont alors obtenu un terme de la forme $2t/(t^2+x)^2$, et nombreuses sont celles qui ont affirmé à tort qu'il était continu. Une utilisation judicieuse de la question 1 permettait pourtant de découper l'intervalle $[0, +\infty[$ en deux parties afin d'éviter les divisions par zéro.

Une rédaction soignée était attendue pour établir que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, mais les étapes suivantes ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ puis $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$) ont souvent pu être traitées à l'oral sans tous les détails, dès lors que le candidat avait démontré une bonne maîtrise des idées principales.

Les bonnes candidates ayant atteint la question 3 ont fait preuve d'ingéniosité pour l'aborder, et plusieurs ont réussi à obtenir, en fin d'oral, l'équation différentielle attendue.

Exercice 18. 1. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(e^{sX}) < +\infty$ pour un certain $s > 0$. Montrer que pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-sa}\, \mathbb{E}(e^{sX}).$$

2. Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $[0, 1]$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq t\right) \leq 2e^{-2t^2/n}.$$

Commentaires : La première question a été résolue très rapidement par les candidates grâce à l'application directe de l'inégalité de Markov. La deuxième question, plus ouverte, a donné lieu à des traitements assez inégaux de la part des candidats. Des premières majorations, parfois un peu trop grossières, ont néanmoins été bien accueillies par le jury, car elles traduisaient une bonne compréhension de la démarche attendue. Pour affiner ces estimations, l'indication d'utiliser la convexité de la fonction exponentielle a été donnée.

Cependant, beaucoup de candidates se sont contentées d'appliquer la convexité en considérant que $X_i - \mathbb{E}(X_i) \in [-1, 1]$, sans percevoir qu'il était nécessaire de raffiner cette borne afin d'éviter de retomber sur des estimations aussi peu précises que précédemment. Plusieurs candidats ont également perdu de vue l'objectif final, à savoir que le paramètre $s > 0$ pouvait être choisi de manière optimale pour améliorer la majoration obtenue.

Exercice 19. Pour $\mu \geq 0$, considérons l'équation

$$(E) : \quad y''(t) - \mu(1 - y^2(t))y'(t) + y(t) = 0.$$

1. Résoudre (E) lorsque $\mu = 0$.
2. On suppose désormais que $\mu > 0$. On introduit des fonctions

$$\omega(\mu) = 1 + \mu\omega_1 + o_{\mu\to 0^+}(\mu)$$

et

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \quad x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau, \mu)$$

avec $\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tel que ε et toutes ses dérivées sur τ sont bornées par $C\mu^2$. Supposons que $t \mapsto x(\omega(\mu)t, \mu)$ est solution de (E) et que x_0 et x_1 sont bornées. Exprimer x_0, ω_1 et x_1.

3. Si on suppose maintenant en plus que

$$\omega(\mu) = 1 + \mu\omega_1 + \mu^2\omega_2 + o_{\mu\to 0^+}(\mu^2),$$

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \quad x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \varepsilon(\tau, \mu).$$

avec $\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tel que ε et toutes ses dérivées sur τ sont bornées par $C\mu^3$. En supposant que x_2 est bornée, exprimer ω_2.

Commentaires : La première question n'a posé de difficulté à aucune candidate. La deuxième, bien que très calculatoire, pouvait devenir nettement plus accessible en réfléchissant en amont à l'objectif visé. La plupart des candidates ont compris, plus ou moins rapidement, qu'il fallait trier les termes selon leur dépendance en μ, et celles qui ont immédiatement choisi de ne pas développer les dépendances en μ^2 ont gagné un temps précieux.

Le jury a également proposé aux candidats d'alléger les notations en écrivant simplement x_0 au lieu de $x_0(\tau, \mu)$ dès qu'il était certain que le candidat avait bien compris les objets manipulés. L'équation sur x_0 avait été résolue en question 1. Pour x_1, les candidates obtenaient une équation du type $x_1'' + x_1 = g$, où g était un second membre formé de produits de fonctions sinus et cosinus. On attendait alors des candidats qu'ils déroulent les méthodes classiques de résolution d'équations différentielles, qui étaient maîtrisées de manière inégale.

En particulier, la linéarisation du terme $\cos^2(\tau)\sin(\tau)$ n'a pas semblé évidente à toutes et a fait perdre un temps précieux à plusieurs candidates. Les rares candidates ayant atteint la question 3 en fin d'oral ont pu engager une discussion pertinente sur les similitudes et les différences avec la question précédente.

Exercice 20.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1 tels que $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(B)$ soient distincts. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, \qquad B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}Q.$$

avec α et β dans $\mathbb{R}$.

2. Soient $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, et soit $\Phi_{P,Q}$ l'endomorphisme défini par $M \mapsto PMQ$. Montrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conserve le rang si et seulement s'il s'écrit $\Phi_{P,Q}$ ou $\Phi_{P,Q} \circ \tau$, avec $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\tau : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application de transposition.

Commentaires : La question 1 a été globalement mal réussie par les candidates. En raisonnant avec des changements de bases, il était pourtant assez rapide d'exhiber deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Cependant, les formules de changement de base étaient souvent mal maîtrisées, et le choix pertinent des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, ainsi que la vérification que les familles proposées formaient bien des bases, ont posé des difficultés à de nombreux candidats.

Concernant la question 2, le jury a apprécié que certains remarquent directement que le sens réciproque était trivial. Pour le sens direct, beaucoup de candidats ont tenté de déterminer à quelles matrices A et B appliquer la question 1, en oubliant parfois de vérifier toutes les hypothèses nécessaires. Le choix $A = E_{1,1}$ et $B = E_{2,2}$ a été suggéré par le jury lorsque les candidates semblaient en difficulté.

En jouant ensuite avec des combinaisons linéaires des matrices $E_{i,j}$ et en utilisant le fait que l'application considérée préserve le rang, les meilleures candidates sont parvenues à mener l'exercice presque à son terme.

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}$. étant données deux variables discrètes X et Y à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$, on définit leurs distributions $p = (p_k)_{0 \leq k \leq n}$, $q = (q_k)_{0 \leq k \leq n}$, c'est à dire

$$p_k = \mathbb{P}(X = k), \quad q_k = \mathbb{P}(Y = k).$$

On définit la distance en variation totale

$$d(p, q) = \max_{S \subset \{0,\dots,n\}} \{\mathbb{P}(X \in S) - \mathbb{P}(Y \in S)\}.$$

1. Montrer que $d(p, q) \geq 0$. Que dire si $d(p, q) = 0$?
2. Soit X une v.a.d. à valeurs dans un ensemble fini de réels et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Peut-on comparer $\mathbb{E}(\varphi(X))$ et $\varphi(\mathbb{E}(X))$? Si oui, comment ?
3. Montrer que si
   — φ est strictement convexe et
   — X n'est pas une variable presque sûre, i.e. $p_k < 1 \ \forall k \in \{0, \dots, n\}$,
   alors l'inégalité de Jensen est stricte.

On introduit maintenant l'entropie relative de p par rapport à q

$$H(p, q) = \sum_{k=0}^{n} p_k \ln \frac{p_k}{q_k}.$$

4. Montre que $H(p, q) \geq 0$. Que dire si $H(p, q) = 0$?
5. Montrer l'inégalité de Pinsker

$$d(p, q) \leq \sqrt{\frac{1}{2} H(p, q)}.$$

Commentaires : L'objectif de l'exercice est de démontrer dans un cas simple (variables aléatoires à valeurs entières et à support fini) l'inégalité de Pinsker entre la distance en variation totale et l'entropie relative de deux lois de probabilités. Les trois premières questions, plus faciles, permettent de poser les bases de l'exercice. Certains candidats ont eu des difficultés à montrer la positivité de la distance en variation totale, ils n'ont pas pensé au passage au complémentaire qui aidait aussi à conclure si la distance était nulle. La seconde question servait à introduire l'inégalité de Jensen, fondamentale pour la question 4.

Le coeur de l'exercice se trouve dans les questions 4 et 5. La jury a été agréablement surpris par la facilité avec laquelle certaines candidates ont résolu la question 4, très astucieuse, qui repose sur l'application de l'inégalité de Jensen à une fonction et des variables aléatoires bien choisies. Pour les candidats qui n'ont pas proposé spontanément les bonnes variables

aléatoires, une indication les aidait à avancer. Plusieurs options étaient possibles pour définir ces dernières. L'exercice était extrêmement long, et aucun candidat n'est arrivée à aller très loin dans la question 5. Toutefois, après une indication de commencer par traiter le cas de lois de Bernouilli, certaines ont pu bien entamer cette dernière.

Exercice 22. Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I de A est *maximal* lorsque I n'est pas égal à A tout entier et qu'il n'est contenu dans aucun idéal à part A et lui-même.

1. Rappeler la définition d'un idéal et montrer que si I est maximal, il ne peut contenir aucun élément inversible.

   Déterminer les idéaux maximaux de A dans les cas suivants :

2. A est l'anneau des fonctions de $\{0,1\}$ dans $\mathbb{R}$.
3. A est l'anneau des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Commentaires : Cet exercice avait pour but de tester la capacité des candidat·e·s à manipuler des notions "algébriques" dans un contexte "analytique". La définition même d'un idéal a parfois posé problème, alors qu'un objectif du programme d'algèbre générale de deuxième année est de "[mettre] l'accent sur la notion d'idéal". La troisième question demande une vraie prise d'initiative et était propice à engager une discussion mathématique avec le jury.

Noter que la caractérisation "Borel-Lebesgue" de la compacité est hors-programme, son utilisation entraîne donc systématiquement une demande de justification.

Exercice 23.

1. Soit $r \geq 2$ un entier. Justifier que pour tout entier $n \geq 0$, il existe une unique suite $(a_{k,r}(n))_{k\geq 0}$, nulle à partir d'un certain rang, d'entiers compris entre 0 et $r-1$, telle que
$$n = \sum_{k\geq 0} a_{k,r}(n) r^k.$$
2. Pour r et k fixé, montrer que la suite $(a_{k,r}(n))_{n\geq 1}$ est périodique, et en calculer une période.
3. Pour r et k fixé, montrer que la suite $(a_{k,r}(n^n))_{n\geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang.
4. Soit $n \geq 2$ un entier, on pose $\lambda(n)$ le plus petit entier $m \geq 1$ tel que, pour tout entier a premier avec n, on a $a^m = 1 \mod n$. Si n est un entier ≥ 2, montrer que :
$$\lambda(n) \leq \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)-1}(p-1)$$
   où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et v_p est la valuation p-adique.
5. Y a-t-il toujours égalité ? (on pourra considérer le cas où n est une puissance de 2).

Commentaires : La première question a été abordée avec un succès variable. L'unicité du développement, notamment, a parfois coûté aux candidat·e·s un temps précieux - trouver une façon de justifier proprement et rapidement ce point est un bon exercice de préparation. Noter que s'il est possible de donner une expression pour les coefficients $a_{k,r}(n)$, ce n'était en rien obligatoire.

Plusieurs candidat·e·s ont proposé une approche "expérimentale" en commençant par étudier le caractère périodique de ces suites sur des cas concrets. C'est une démarche tout à fait pertinente, qui doit bien sûr mener ensuite à une démonstration rigoureuse.

5.2 Exercices principaux, sans commentaires

Exercice 24. Dans cet exercice, on se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle d'espace euclidien orienté induite par la base canonique $\mathcal{B}_c$. Le but de cet exercice est de déterminer une formule donnant l'angle de la rotation obtenue comme composée de deux rotations de E.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme $z_u : E \to E$ anti-auto-adjoint, c'est-à-dire que $z_u^* = -z_u$, vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad \det_{\mathcal{B}_c}(u, x, y) = \langle z_u(x), y\rangle.$$

2. Soit $u \in E$ un vecteur unitaire et $\varphi \in \mathbb{R}$ un réel. Soit $r(u, \varphi) \in \mathrm{SO}(E)$ la rotation d'axe orienté par u et d'angle φ, c'est-à-dire que $r(u, \varphi)$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui fixe $\mathrm{Vect}(u)$ et donc la restriction à $u^\perp$ est la rotation d'angle φ. Montrer que

$$r(u, \varphi) = \cos(\varphi)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + \big(1 - \cos(\varphi)\big)p_u + \sin(\varphi)z_u$$

où p_u désigne la projection orthogonale sur u et en déduire une formule reliant φ et la trace de $r(u, \varphi)$.

3. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires formant un angle non-orienté τ et $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ deux réels. Montrer que $r(u, \varphi) \circ r(v, \psi)$ est une rotation dont l'angle non-orienté θ vérifie

$$\left|\cos(\frac{\theta}{2})\right| = \left|\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\tau\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\right|.$$

Exercice 25. Soit p un nombre premier impair et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier naturel non nul. On pose $q = p^\alpha$. Soit $f : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ une fonction. On dit qu'une partie D de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est f-génératrice si

$$\forall y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z},\ \exists n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2},\ \exists d_1, \ldots, d_n \in D,\ y = f(f(\ldots f(d_1, d_2), d_3)\ldots, d_n))$$

1. Dans cette question, on suppose que $\forall x, y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z},\ f(x, y) = x - y$. En fonction de p et α, combien y a-t-il de parties D qui sont f-génératrices et de cardinal minimal ?
2. On suppose désormais que $f(x, y) = x \times y$ et que $q = p^\alpha$ où p est un nombre premier différent de 2 et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe aucune partie f-génératrice réduite à 1 élément.
3. On admet que le groupe $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Montrer qu'il existe au moins une partie f-génératrice à 2 éléments ?
4. Combien y a-t-il de parties f-génératrices à 2 éléments ?
5. Justifier le lemme admis :

$$(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \text{ est un groupe cyclique.}$$

Exercice 26.
1. Montrer que, quels que soient $(a, b) \in \mathbb{R}\times]-\pi, \pi[$, l'équation $z + e^z = a + ib$ admet des solutions complexes $z \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto ze^z \in \mathbb{C}$ est surjective.
3. En déduire que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto A\exp(A) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est surjective.

Exercice 27. Dans cet exercice, on s'intéresse aux morphismes d'un groupe G qui est engendré par un nombre fini d'éléments.

1. Montrer que pour tout groupe fini H, l'ensemble des morphismes $\varphi : G \to H$ est fini.

2. Soit $\psi : G \to G$ un morphisme surjectif du groupe G dans lui-même. Soit H un groupe fini. Montrer que le noyau de ψ est contenu dans l'intersection des noyaux des morphismes de G vers H.
3. On prend $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant égal à 1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et qu'il est engendré par les trois matrices :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que tout homomorphisme surjectif du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans lui-même est en fait bijectif.

Exercice 28. 1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 mod 4.

Dans la suite, on se donne p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul et on pose $K = \frac{(np)^p - 1}{np - 1}$.

2. Montrer que K est premier à $np - 1$.
3. Montrer que tout facteur premier de K est congru à 1 mod p.
4. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 mod p.

Exercice 29. Soit $(G, +)$ un groupe commutatif (noté additivement). On utilisera les définitions suivantes :

— G est sans torsion si pour tout entier naturel non-nul n et tout $x \in G$ non-nul, nx est non-nul ;

— G est ordonnable s'il existe un ordre total $<$ sur G tel que pour tous $x, y, z \in G$ si $x < y$ alors $x + z < y + z$.

1. Montrer que si G est ordonnable alors G est sans torsion.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{Z}^n$ est ordonnable.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que si G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ alors il existe $r \leq n$ tel que G est isomorphe à $\mathbb{Z}^r$.

Les deux dernières questions n'ont pas été abordées.

4. Montrer que si G est sans torsion et de type fini (i.e. engendré par une partie finie) alors il existe $n \geq 1$ tel que G est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.
5. Montrer que si G est dénombrable et sans torsion alors G est ordonnable.

Exercice 30. On note E l'ensemble des fonctions Lipschitziennes 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ et $\alpha \in (0, 1]$, on pose

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R} \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

1. Montrer que pour tout $\alpha \in (0, 1]$, l'application $\| \cdot \|_\alpha$ est une norme sur E.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions C^1 et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est fermé dans E lorsque celui-ci est muni de la norme $\| \cdot \|_1$.
3. Montrer que ce n'est plus le cas si E est muni de la norme $\| \cdot \|_\alpha$ pour un $\alpha \in (0, 1)$.

Exercice 31. Soit $\mathcal{A}$ une algébre (unitaire). On se donne une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathcal{A}$. On suppose que la multiplication $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est continue pour cette norme et que les séries absolument convergentes dans $\mathcal{A}$ convergent.

1. Soit a un élement de $\mathcal{A}$. On note $U = \{z \in \mathbb{C} : z - a \text{ est inversible}\}$. Montrer que U est un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$ et que l'application $z \mapsto (z-a)^{-1}$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{A}$.
2. On veut montrer que $U \neq \mathbb{C}$. Par l'absurde on suppose que $U = \mathbb{C}$. On admet qu'il existe une forme linéaire continue l sur $\mathcal{A}$ tel que $l(1) = 1$ et pour $r \in (0, +\infty)$ on pose

$$f(r) = \int_0^{2\pi} l((re^{i\theta} - a)^{-1}) re^{i\theta} \mathrm{d}\theta.$$

   Montrer que f est constante et obtenir une contradiction.

Exercice 32. Soit $d \in \mathbb{N}^\star$. Soit $M \in Gl_d(\mathbb{R})$. $\|M\|$ désigne la norme d'opérateur induite par la norme euclidienne. On définit le conditionnement de M par

$$\mathrm{Cond}(M) := \|M\| \cdot \|M^{-1}\|.$$

1. Calculer le conditionnement de $M \in S_d^{++}(\mathbb{R})$ en fonction des valeurs propres de M.
2. Montrer que pour toute matrice inversible M on a

$$\mathrm{Cond}(M) \geq 1$$

   et que

$$\mathrm{Cond}(M) = \mathrm{Cond}(M^T).$$

3. Que dire d'une matrice M telle que

$$\mathrm{Cond}(M) = 1?$$

4. Démontrer que, si A et B sont deux matrices symétriques définies positives, on a

$$\mathrm{Cond}(A+B) \leq \max(\mathrm{Cond}(A), \mathrm{Cond}(B)).$$

Exercice 33.
1. Soit f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre : $f'' + af' + bf = 0$ (a et b des fonctions continues). On suppose que f est non identiquement nulle. Montrer que les zéros de f sont isolés (i.e. si x_0 est un zéro de f alors il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}$ telle que x_0 est le seul zéro de f dans U).
2. Soient a et b des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $a > b$, et on se donne deux fonctions f et g deux fois dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, non-identiquement nulles, telles que $f'' + af = 0$ et $g'' + bg = 0$. Montrer que si $t_0 < t_1$ sont des points de $[0,1]$ tels que $g(t_0) = g(t_1) = 0$ alors il existe $t \in (t_0, t_1)$ tel que $f(t) = 0$.
3. On se donne deux fonctions continues à valeurs réelles p et q sur $[0,1]$, et on suppose $q > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ la solution sur $[0,1]$ de $f_\lambda'' + (p + \lambda q) f_\lambda = 0$ qui vérifie $f_\lambda(0) = 0$ et $f_\lambda'(0) = 1$. On note $N(\lambda)$ le nombre de zéros de f_λ. Montrer que la fonction N est croissante. Calculer ses limites en $\pm\infty$.
4. On note S l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f_\lambda(1) = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ strictement croissante telle que $S = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. On pourra admettre que l'application $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ est continue de $\mathbb{R} \times [0,1]$ vers $\mathbb{R}$.

   La dernière question n'a pas été abordée.
5. Montrer que l'application $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ est continue de $\mathbb{R} \times [0,1]$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 34. Soit f une fonction C^∞ et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_n(f) = \int_0^1 e^{-2i\pi nx} f(x) \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction C^∞ et 1-périodique g telle que $f(x) = (e^{2i\pi x} - 1)g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On suppose toujours que $f(0) = 0$, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) = 0$.

Les questions suivantes n'ont pas été abordées.

4. On ne suppose plus $f(0) = 0$ *a priori*. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : x \mapsto e^{2i\pi nx}$. Montrer que la série de fonctions

$$c_0(f)e_0 + \sum_{n\geq 1} c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_n$$

converge uniformément vers f.

5. On suppose $c_0(f) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction C^∞ et 1-périodique h telle que $f(x) = h(x + \sqrt{2}) - h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 35.

1. Expliciter les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)a_n = na_{n+1}$$

2. Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

3. Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

Exercice 36.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux matrices diagonalisables et qui commutent alors elles sont diagonalisables dans la même base.
2. Définissons l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (H, Q) & \longmapsto & HQ \end{array}$$

où $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques définies positives, et $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. Montrer que ϕ est une bijection.

3. Montrer que ϕ^{-1} est continue.
4. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Posons $M_0 = M$ et

$$M_{k+1} = \frac{1}{2}M_k(I_n + (M_k^\top M_k)^{-1})$$

Étudier la convergence de M_k.

Exercice 37. Une randonneuse cherche l'emplacement de camping idéal pour planter sa tente le long d'un sentier de montagne. Elle sait qu'il y a exactement N emplacements possibles, tous de qualités différentes, qu'elle va découvrir les uns après les autres en marchant. Chaque fois qu'elle arrive sur un nouvel emplacement, elle peut comparer sa qualité à ceux déjà vus. Elle sait alors si c'est le meilleur qu'elle a vu jusque-là, mais pas si c'est le meilleur de tous. Elle doit décider immédiatement si elle s'arrête là pour y planter sa tente, ou si elle continue, et elle ne peut pas revenir en arrière. Elle gagne si elle choisit le meilleur emplacement de tous (le meilleur parmi les N).

1. Pour $N = 3$, proposer une stratégie qui maximise la probabilité de gagner et le justifier.
2. On décide de regarder les k premiers emplacements, puis, à partir du $k+1^{\text{e}}$, on choisit le premier emplacement qui est meilleur que les précédents. Proposer une valeur optimale de k et évaluer la probabilité de succès quand N est grand.

Exercice 38. Le but de cet exercice est d'étudier l'inégalité isopérimétrique dans le cas polygonal et, plus généralement, d'aborder des problèmes géométriques en utilisant l'optimisation sous contrainte comme outil principal.

1. Mise en jambe On considère un rectangle de côtés x et y et de périmètre 1. Déterminer x et y de sorte que l'aire du rectangle soit maximale.
2. Un premier problème d'optimisation géométrique
   Nous considérons un polygone convexe inscrit dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$. En d'autres termes, nous considérons $0 = \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_n < 2\pi$, et le polygone associé est l'enveloppe convexe de $\{e^{i\theta_k}\}_{k=1,\ldots,n}$. Montrer que le périmètre d'un tel polygone P est maximal lorsque
   $$\theta_1 = 0\,, \quad \theta_{k+1} - \theta_k = \frac{2\pi}{n}.$$
3. L'inégalité isopérimétrique polygonale
   Nous voulons résoudre le problème suivant : étant donné une contrainte de périmètre L et un nombre de côtés fixé N, quel est le polygone à N côtés qui maximise l'aire qu'il enferme ? Nous représentons un polygone dans $\mathbb{R}^2$ par une famille de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,N}$. On admet que l'aire de ce polygone est donnée par
   $$A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}).$$
   (a) Quel est le périmètre d'un tel polygone ?
   (b) Montrer qu'il existe un polygone optimal.
   (c) Résoudre le problème d'optimisation.

Exercice 39.
1. On dit qu'une norme matricielle est orthogonalement invariante si pour toutes matrices orthogonales $P\,, P'$ on a $\|P'MP\| = \|M\|$. Donner un exemple de norme unitairement invariante.
2. On veut montrer qu'une norme orthogonalement invariante N est induite par deux normes $(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)$ si, et seulement si, il existe une constante α telle que $N(A) = \alpha \sup_{\lambda\in\mathbb{C}\,,\lambda \text{ valeur propre de } A^TA} |\sqrt{\lambda}| = \alpha\rho(A)$.
   (a) Montrer que si $A \in M_d(\mathbb{R})$ est de rang m, il existe deux matrices orthogonales $U\,, V$ et $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, 0, \ldots, 0)$ avec $\sigma_1, \ldots, \sigma_m > 0$ telles que
   $$A = UDV.$$
   On appelle cette décomposition *décomposition en valeurs singulières de A*.
   (b) Montrer que si une norme N est unitairement invariante, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que pour toute matrice de rang 1 A, on a
   $$N(A) = \alpha\rho(A).$$
   (c) On voit x et y comme des vecteurs colonnes. Montrer que si N est induite par $(\|\cdot\|_{N_1}, \|\cdot\|_{N_2})$, alors
   $$N(yx^T) = \|y\|_{N_2} \sup_{z\,,\|z\|_{N_1}=1} |\langle x, z\rangle|.$$

(d) Supposons qu'une norme invariante unitaire est induite par deux normes. Montrer que ces deux normes coïncident, à facteur multiplicatif près, avec la norme euclidienne.

(e) Montrer que la norme de Frobenius

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$$

n'est pas induite par deux normes.

Exercice 40. Soit $V = [\![1, n]\!]$ et F l'ensemble des parties à deux éléments de V. Soit E une partie de F et n_i le nombre d'éléments de E contenant i. On définit la matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$L_{i,j} = \begin{cases} n_i & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de L, comptées avec leur multiplicité et rangées par ordre croissant.

1. Montrer que $\lambda_1 = 0$.
2. Montrer que
$$\lambda_2 = \min_{x \neq 0,\, x \perp (1,1,\ldots,1)} \frac{x^\top L x}{x^\top x}$$
3. On introduit h défini par
$$h = \min_{S \subset V,\, 0 < |S| \leq n/2} \frac{|\partial S|}{|S|}$$
où S est un sous-ensemble de V, $|\cdot|$ désigne le cardinal, et $\partial S = \{\{i,j\} \in E \mid i \in S \text{ et } j \in V \setminus S\}$. Montrer alors que
$$\frac{\lambda_2}{2} \leq h.$$

Exercice 41. Dans tout l'exercice, on fixe $p \in]0,1[$.

1. Rappeler la définition de la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$, calculer sa fonction génératrice, et montrer sa propriété d'absence de mémoire, c'est à dire que pour tous entiers $k, a \geq 0$, et pour $X \sim \mathscr{G}(p)$,
$$\mathbb{P}(X - k > a \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X > a).$$
2. Après avoir justifié de son existence, rappeler la valeur de l'espérance de $X \sim \mathscr{G}(p)$.
3. Soit un entier $r \geq 1$. Calculer la loi de $Y = X_1 + \cdots + X_r$, ou les X_i sont i.i.d. de distribution $\mathscr{G}(p)$. On appellera cette distribution la *Binomiale négative de paramètres r et p, notée $BN(r,p)$.*
4. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que
$$\mathbb{P}(Z = k) = C_0(1-p)^k/k.$$
Déterminer la constante C_0.
5. On considère maintenant une suite i.i.d. $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de même loi que Z, et soit N une variable de Poisson, de paramètre λ. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la variable aléatoire
$$R = \sum_{k=1}^{N} Z_k$$
suive une loi $BN(r,p)$.

Exercice 42. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X(X-1)]$.
2. On suppose maintenant que λ est un entier supérieur à 1. Soit p un nombre premier. Calculer $\mathbb{E}[X^p]$ modulo p.

5.3 Seconds exercices

Exercice 43. 1. Soit u une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que u est identiquement nulle hors de $[-R, R]$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes que l'on identifiera telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} u(x)\mathrm{d}x \underset{\lambda\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{N} \lambda^{-2k-\frac{1}{2}} a_k + \mathcal{O}(\lambda^{-(2N+1)})$$

2. On se donne maintenant en plus une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) > 0$. Montrer le même résultat qu'à la question précédente pour l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda\varphi(x)} u(x)\mathrm{d}x$$

mais sans identifier la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Commentaires : Cet exercice a été posé dans une situation où il restait beaucoup de temps après la résolution du premier exercice. La valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ était rappelée au besoin. La question 2 n'a pas été abordée.

Exercice 44. 1. Soient $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante, non-bornée et positive. On suppose que, pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \underset{n\to\infty}{\to} \ell.$$

Montrer que

$$\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\to} \ell.$$

2. Soit $\lambda \in]-1; 1[$ et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour un certain $a \in \mathbb{R}$, on ait

$$x_{n+1} - \lambda x_n \underset{n\to\infty}{\to} a.$$

La suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Commentaires : L'exercice a été posé dans une situation où il restait peu de temps.