

Banque MP inter-ENS – Session 2025

Rapport relatif à l'épreuve orale de mathématiques

- **Ecoles partageant cette épreuve :**
ENS Paris-Saclay, ENS Rennes
- **Coefficients** (en pourcentage du total des points de chaque concours) :
 - ENS Paris-Saclay
 - * Concours MP Option MP : 23,1 %
 - ENS Rennes
 - * Concours MP Option MP : 23,1 %
- **Membres du jury :**
A. Bailleul, L. Gassot, B. Laboureux, D. Lesesvre, A. Pierrot-Valroff, T. Untrau

Déroulement de l'épreuve

Cette année, 278 candidats et candidates ont passé l'oral de mathématiques spécifique pour les écoles normales supérieures de Rennes et Paris-Saclay, dont 22 candidates au total, soit à peine 8%. Il s'agit d'un oral sans préparation, d'une durée de 45 minutes. Une amorce d'énoncé est donnée, commençant en général par une question proche du cours, et pouvant introduire des notations ou des questions préparatoires pour la suite de l'exercice. L'intégralité des énoncés n'est pas toujours donnée, et la difficulté des questions posées et des étapes intermédiaires suggérées par l'examineur ou l'examinatrice dépendent du déroulé de l'oral. Les premières minutes de l'examen sont dédiées à un travail en autonomie durant lesquelles le jury n'intervient pas. Cela a pour but de permettre au candidat ou à la candidate de s'approprier l'exercice en pleine concentration. Il est conseillé de ne pas négliger cette phase de préparation en autonomie, initier immédiatement la discussion avec le jury ne donnant absolument pas lieu à des bonifications. Nous recommandons également de ne pas hésiter à utiliser le tableau avec abondance lors de cette première phase, y compris comme brouillon : il n'est pas tenu rigueur de raisonnements ou résultats erronés écrits durant cette phase, pourvu qu'ils soient corrigés lors de la restitution orale. La suite de l'oral prend la forme d'une discussion avec le jury durant laquelle ce dernier intervient pour aiguiller ou questionner, que ce soit sur l'exercice ou bien sur une notion connexe. À la fin de l'oral, le jury ne fait aucun retour sur la prestation du candidat ou de la candidate. Par ailleurs, les candidat.e.s ne sont pas autorisé.e.s à conserver ou à prendre en photo le matériel fourni lors de l'épreuve.

Sont évalués à la fois la méthode, la rigueur, la connaissance du cours et les compétences techniques, mais aussi l'autonomie, les idées, le recul sur le programme et l'exercice, ainsi que les capacités de communication. Il va sans dire qu'on ne peut que déconseiller aux futurs candidats et candidates de négliger un de ces points lors de leur préparation. En revanche, le jury n'évalue que très peu la capacité à trouver une solution astucieuse à un exercice : un candidat ou une candidate avançant à son rythme et avec rigueur vers la résolution du problème, en proposant de résoudre des cas particuliers bien choisis ou des résultats intermédiaires, et capable de rebondir sur les indications de l'examineur ou de l'examinatrice, se verra attribuer une excellente note. De plus, un candidat ou une candidate qui reconnaît un exercice déjà fait et veut absolument restituer une méthode apprise, au détriment des orientations du jury, est assez mal perçu ; ce-dernier attendrait par ailleurs d'une telle restitution une maîtrise très solide des arguments et des propriétés ou hypothèses sous-jacentes, ce qui n'a malheureusement pas toujours été le cas.

À l'abord d'une nouvelle question, le jury laisse le temps de creuser une piste et de réfléchir, puis engage rapidement la discussion. Selon les situations, cette discussion peut prendre plusieurs formes : l'examinatrice ou l'examineur peut demander des éclaircissements ou des corrections mineures sur la preuve proposée, une synthèse de l'idée de preuve ou au contraire, réclamer une rédaction plus précise et rigoureuse des arguments précédemment fournis par le candidat ou la candidate, ou suggérer d'explorer des cas particuliers ou des cas limites.

Évaluation générale

Le jury s'accorde à dire que l'ensemble des admissibles est de bon niveau, avec de bons réflexes mathématiques, ainsi qu'une connaissance approfondie du cours et des contre-exemples classiques. On observe de temps en temps des personnes plus sensibles au stress, qui buttent sur les premières questions ; certaines se révèlent tout à fait capables par la suite, alors que d'autres semblent perdre courage au fur et à mesure de l'oral. Nous rappelons donc à l'ensemble des admissibles que le jury demeure toujours bienveillant, les questions du jury étant là pour aider à avancer dans l'exercice. Chaque année, de nombreux candidats et candidates font de très bons oraux après un départ laborieux, et il ne faut pas chercher à interpréter la discussion avec le jury, les exercices étant très différents les uns des autres. Le but du jury n'est en aucun cas de piéger les candidats et candidates, par ailleurs déjà assez sujets au stress : s'ils se voient demander s'ils sont sûrs de ce qu'il viennent d'affirmer, c'est sans doute que l'interrogateur ou l'interrogatrice veut donner l'occasion de discuter pour clarifier l'énoncé, comprendre l'argument, mettre le doigt sur des imprécisions ou des contre-exemples, ou encore demander une preuve plus précise des arguments. Le manque de justifications est aussi toujours relevé par un "pourquoi?", auquel la réponse attendue n'est souvent que de bien citer un théorème au programme et de vérifier toutes ses hypothèses, ou de clarifier l'argument.

Comme les années précédentes, nous avons noté que de nombreuses personnes ne pensent pas à appuyer leur réflexion sur des dessins (ou des exemples simples) qui se révèlent parfois un soutien indispensable à la résolution d'un exercice et qui est, dans tous les cas, d'une grande aide pour clarifier son propos. Nous avons noté de très bons réflexes sur les théorèmes d'échanges de limites et d'intégrales et leurs hypothèses, bien que certains théorèmes essentiels (dont le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et les différentes formules de Taylor) ont trop souvent été énoncés de manière approximative. Il y a une grande disparité dans la compréhension des structures algébriques abstraites. Nous avons aussi été assez surpris des difficultés de certains candidats et candidates sur des questions de dénombrement. Certains calculs matriciels ont été menés de manière très laborieuse - certains candidats et candidates ayant cherché obstinément des astuces de calculs, alors qu'une utilisation directe de la définition permet souvent de conclure en quelques lignes. Les arguments de réduction, au programme de deuxième année, étaient dans l'ensemble bien mieux maîtrisés que l'algèbre linéaire de première année. La proportion de candidats et de candidates oubliant que $M_n(\mathbb{C})$ n'est pas commutatif lors de calculs de puissances de matrices triangulaires par blocs a étonné le jury. Les difficultés en calculs se retrouvent aussi dans les manipulations, souvent hésitantes et parfois fausses, d'inégalités entre modules de nombres complexes.

Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidates et candidats et n'ont aucun caractère absolu ; il ne s'agit que de classer les admissibles dans le contexte d'un exercice particulier. Ainsi, des candidats ou candidates peuvent recevoir des notes relativement basses. Elles n'enlèvent rien à l'estime que le jury porte aux efforts de leur préparation et ne préjugent en rien de leurs qualités de futures mathématiciennes et mathématiciens.

Conseils pour les futur.e.s admissibles

Ces conseils recourent en grande partie ceux des années précédentes.

- Fait heureusement rare, certains candidats et candidates choisissent de s'enfermer dans un mutisme quasi-total. Cela ne peut bien sûr être que préjudiciable à une épreuve d'oral - et ce, quelque soit le niveau mathématique de l'admissible.
- On voit trop de candidats et candidates refuser de rédiger leurs preuves et se contenter d'en répéter l'idée générale, malgré l'insistance du jury. Si l'exposé de la stratégie de preuve est apprécié par le jury, sa mise en œuvre se révèle souvent plus délicate qu'il n'y paraît. Il faut donc donner au moins autant de détails que ce que le jury le demande : rédiger proprement une preuve, vérifier les hypothèses des théorèmes, éventuellement énoncer des résultats intermédiaires, etc. Faire manifestement preuve de réticence à écrire son raisonnement au tableau a été systématiquement sanctionné.
- De même, malgré l'insistance du jury, certains candidats et candidates rechignent à écrire proprement les hypothèses des questions au tableau, et plus généralement tout ce qui ne relève pas de la formule mais fait quand même partie intégrante du langage mathématique : connecteurs logiques, quantificateurs, etc. Inutile de dire que c'est une très mauvaise idée. En premier lieu, cela permet, à tout moment, de retrouver l'énoncé précis du résultat auquel on souhaite aboutir, et d'isoler les hypothèses utiles à chaque étape du raisonnement. Ensuite, cela permet de réutiliser dans la suite de la planche les questions déjà traitées (ce qui est assez courant). Enfin, ne pas faire ce que demande le jury démontre soit une capacité de communication limitée, soit une témérité inattendue lors d'une épreuve orale. Notons que la gestion du tableau est une compétence évaluée, au moins indirectement, par le jury : des candidats et candidates se sont retrouvés bloqués au cours de la planche du fait d'avoir effacé une partie de leurs résultats, et ce malgré les protestations de l'interrogatrice ou de l'interrogateur. D'autres ont perdu un temps précieux à réécrire plusieurs fois des raisonnements déjà effectués lors des questions précédentes mais effacés par la suite sans en garder de trace. Se forcer à présenter correctement son tableau, c'est aussi s'assurer d'avoir à tout moment la structure de l'exercice en tête.
- Certains candidats et candidates ne tiennent pas compte des pistes fournies par le jury au cours de l'épreuve. Le but de ce dernier n'est pas de lancer sur de fausses pistes, mais bien de guider dans la résolution d'exercices parfois difficiles. Ces pistes même si elles n'évoquent rien immédiatement au candidat ou à la candidate doivent néanmoins faire l'objet d'investigation.
- De manière similaire, la première question de l'exercice fournit, dans bon nombre de cas, une indication devant être utilisée dans la suite de l'exercice. Lorsqu'il est demandé de rappeler une formule de Taylor au début de l'exercice, il est fort probable que celle-ci intervienne dans la suite, et il est assez regrettable que certains candidats et candidates ne songent alors pas à exploiter cette première question. A contrario, certain.e.s cherchent par tous les moyens à traiter la question 2 à l'aide de la question 1. Les questions ne sont pas nécessairement imbriquées les unes dans les autres. Il est davantage attendu d'adopter une posture de recherche active en réfléchissant au problème posé plutôt que d'essayer de faire intervenir artificiellement un résultat préliminaire.
- À tout moment de l'oral le jury peut être amené à poser des questions très simples autour du cours ou de cas particuliers. C'est tout à fait normal et cela ne présage en rien de la réussite de la personne interrogée, mais vise à évaluer de manière la plus complète possible sa maîtrise. Cela peut aussi constituer une indication (à demi) cachée pour la résolution de l'exercice, que ce soit par l'utilisation directe de la propriété demandée ou bien de son

idée de preuve. Certains candidats et candidates ont été mis en défaut sur ces questions. Il est crucial de rappeler que le cours doit être maîtrisé.

- Le jury apprécie grandement les candidats et candidates qui, lorsqu'ils ou elles sèchent sur une question, proposent spontanément de considérer des cas simples (le plus souvent il s'agit de traiter le cas $n = 2$ avant de s'attaquer à des n quelconques, que n soit une dimension, un cardinal ou un paramètre). Il est assez rare que les personnes interrogées osent simplifier un énoncé difficile, or quand elles le font l'initiative est souvent couronnée de succès et débouche sur une preuve générale. Lorsqu'une telle simplification devient triviale et ne permet pas d'avancer sur le cas général, le jury apprécie aussi que les candidats et candidates s'en rendent compte spontanément.
- Au contraire, certains candidats et candidates essaient de résoudre la question posée en cherchant exhaustivement une astuce qui permettrait une solution immédiate et lucrative en termes de note finale. Comme nous l'avons déjà dit, nous ne cherchons pas à évaluer de telles astuces. Les exercices proposés ne sont pour ainsi dire jamais "à astuce", mais demandent une certaine imprégnation de l'énoncé et des notions mises en jeu (à l'instar de presque tous les problèmes de recherche). Ils nous permettent de tester des qualités qui feront des futurs normaliens et normaliennes de bons enseignants et de bonnes chercheuses : compréhension profonde des objets manipulés (qui constitue un prérequis aux compétences pédagogiques) et capacités d'adaptation face à un problème nouveau. Les rares exercices présentant une "astuce" ont fait l'objet d'indications claires et précises dans l'énoncé ou bien directement par le jury le cas échéant.
- De rares candidats et candidates demandent des retours sur leur oral ou des conseils pour s'améliorer en fin d'oral. Cette attitude, relevant de la maladresse et du stress, n'a pas été sanctionnée, mais il va sans dire que le jury ne peut donner aux candidats et candidates des commentaires sur leur prestation.
- Les exercices font parfois intervenir des objets ne tombant pas directement dans le programme (par exemple, des EDO non linéaires). Dans ce cas, le jury est bien conscient de ce fait, et aucune connaissance hors programme n'est attendue. Le but de telles questions est de voir comment les candidates et les candidats réagissent face à la nouveauté ou à un cadre original. Les énoncés sont conçus pour pouvoir être résolus grâce à une réflexion ne faisant intervenir que des notions connues. De même, il est rappelé qu'un étalage de connaissance hors-programme ne fait gagner aucun point supplémentaire. Les quelques candidats et candidates s'y étant risqué ont au contraire mis en avant une difficulté à se concentrer sur une problématique donnée et à identifier de façon précise les connaissances nécessaires à la résolution de l'exercice, voire se sont enfermés dans des résultats hors-programmes dont ils ou elles avaient connaissance mais qui orientait dans une mauvaise direction pour la résolution de l'exercice.
- Le niveau des exercices proposés étant relativement hétérogène, il est compensé par la quantité d'indications fournies par le jury. Les candidats et candidates ne doivent donc pas s'inquiéter si l'examinatrice ou l'examinateur a tendance à leur en fournir régulièrement : cela peut simplement signifier que l'exercice proposé est difficile et nécessite un soutien régulier du jury pour y progresser dans les 45 minutes imparties. Il est par ailleurs important de noter que les exercices ne sont pas nécessairement pensés pour pouvoir être terminés dans le temps imparti, et de très rares personnes sont parvenues à bout de leur planche.

Exemples d'exercices donnés

Pour illustrer quelques-uns de ces points, voici des exemples d'exercices proposés lors des épreuves orales. Pour certains exercices, seules les premières questions étaient données au début de l'oral.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E := \{A \in S_n^+(\mathbb{R}), \text{rg}(A) = 1\}$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in E \Leftrightarrow \exists U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, A = UU^T$.

On considère désormais $a \in C^0(\mathbb{R}_+, E)$ et on veut montrer que :

$$\exists u \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall x \in \mathbb{R}_+, a(x) = u(x)u(x)^T.$$

2. Montrer que le résultat est équivalent à l'existence de $z \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, z(x)^T a(x) z(x) > 0$.

3. Soient $a < b \in \mathbb{R}_+$ et $i, j \in [1, n]$ tels que $\forall x \in [a, b], a_{i,i}(x) > 0$ et $a_{j,j}(x) > 0$. Montrer qu'il existe $z \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ telle que $\forall x \in [a, b], z(x)^T a(x) z(x) > 0$, et de plus $z(a) = e_i$ et $z(b) \in \{-e_j, e_j\}$.

4. Conclure en considérant l'ensemble

$$S := \{b \in \mathbb{R}_+ / \exists z \in C^0([0, b], \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall x \in [0, b], z(x)^T a(x) z(x) > 0 \text{ et } z(b) \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}\}.$$

Commentaires La première question pouvait être abordée par de nombreuses manières (notamment, le théorème spectral ou la caractérisation classique des matrices de rang 1), ce qui a souvent permis aux candidats et candidates de la traiter en autonomie. Cependant, on note dès cette question des difficultés (chercher U dans $M_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathbb{R}^n$, chercher une écriture de la forme $U^T U$ au lieu de $U U^T$), qui pourraient être évitées par une lecture plus attentive de l'énoncé et une recherche de la rigueur plutôt que de la vitesse de résolution de la question.

La deuxième question, plus technique, nécessitait naturellement une aide du jury. Elle a permis de valoriser les candidats et les candidates sachant rebondir sur ces indications, et n'hésitant pas à faire des dessins pour mieux comprendre les objets manipulés. On peut tout de même déplorer que de nombreux candidats et candidates n'aient pas pu traiter seuls le sens "facile", ni même déterminer quel était ce sens "facile".

Les questions 3 et 4, tout aussi techniques que la 2, n'ont été abordées que par une poignée de candidat.e.s.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ et

$$X := \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire un n -uplet de variables aléatoires réelles). On suppose que $\mathbb{E}(\|X\|^2) < +\infty$ et on définit la matrice $C(X)$ comme $(\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Rappeler la définition de la covariance de deux variables aléatoires réelles X_i et X_j . Quelle est le lien entre cette notion et celle de variance $\mathbb{V}(X_i)$ d'une seule variable aléatoire X_i ? Que dire de la matrice $C(X)$ si les X_i sont indépendantes deux à deux?

2. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On définit une variable aléatoire Y par $Y := \langle v, X \rangle$. Montrer que Y admet une variance et la déterminer en fonction de v et de $C(X)$.

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $Z := AX$. Déterminer $C(Z)$ en fonction de A et de $C(X)$.
4. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathbb{E}(\|X\|^2) < +\infty$ et $M = C(X)$ si et seulement si M est symétrique positive.
5. On suppose que les variables X_i sont centrées. Montrer qu'il existe un plus petit sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ tel que $X \in F$ presque sûrement et le déterminer en fonction de $C(X)$.

Commentaires Les trois premières questions de cet exercice sont proches du cours et ne présentent aucune difficulté particulière, si ce n'est qu'elles demandent une certaine efficacité dans les calculs. Certain.e.s candidat.e.s ont perdu plus de temps à chercher une manière de les éviter qu'il n'en faut pour développer ces produits matriciels. Parfois, plutôt que de passer beaucoup de temps à chercher à retrouver les résultats en ne travaillant qu'avec des matrices et des vecteurs, il aurait été plus efficace d'oser donner des noms aux coefficients des matrices, et de développer les calculs sans se tromper dans les indices. La question 4 se ramène à la construction de variables aléatoires de variance $\lambda \geq 0$, et le jury pouvait demander de redémontrer que la variance d'une variable de Poisson de paramètre λ est bien λ . Il est à noter que de petites questions autour du cas $\lambda = 0$ ont parfois déstabilisé les candidat.e.s : rappelons qu'il n'y a pas que la variable aléatoire nulle qui a une variance nulle. La dernière question, moins guidée, a permis de valoriser les candidates et les candidats qui ont su relier la question à des arguments géométriques (la notion d'orthogonal d'un sous-espace jouant un rôle important dans cette preuve).

Exercice 3. 1. Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^\alpha}$$

en fonction de $\alpha > 0$.

2. Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n},$$

puis celle de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|\sin(n)|}{n}.$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. En considérant les nombres $\{n\alpha\}$ pour $0 \leq n \leq Q$, justifier l'existence de deux entiers p et q avec $0 < q \leq Q$ tels que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

4. On suppose maintenant que α est irrationnel. Montrer qu'il existe une suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

et $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

5. Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sin^2(n)}.$$

6. Discuter plus généralement de la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a |\sin(n)|^b}$$

avec $a, b > 0$.

Commentaires Lors de la première question, dont les cas non triviaux ($0 \leq \alpha \leq 1$) se traitent par transformation d'Abel, les candidat.e.s ont été rapidement invité.e.s à introduire la somme des $\sin(k)$ pour k allant de 1 à n , si ceux-ci ou celles-ci ne l'avaient pas fait spontanément. Les trois premières questions ont été généralement bien réussies : les candidat.e.s ont souvent su déterminer par eux-mêmes à quels chapitres du programme faire appel. Les formules de linéarisation du sinus ont parfois posé problème. Les questions suivantes ont permis de valoriser les candidates et les candidats sachant mettre à profit le résultat de la question 3. La dernière question, plus exploratoire, n'a été abordée que par quelques candidates et candidats.