

**ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLE DES MINES DE PARIS
ÉCOLES CENTRALE**

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2026

**FILIÈRE BCPST
COMPOSITION DE PHYSIQUE**

Épreuve commune aux ENS de Lyon, Paris, Paris-Saclay, à l'ENPC, aux Écoles centrale et
aux Mines Paris

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices est strictement interdite pour cette épreuve

Tournez la page S.V.P.

Étude des états physiques de l'eau

On s'intéresse dans ce sujet à des propriétés particulières de l'eau dans les états liquide, gazeux puis solide. Les phénomènes capillaires de l'eau liquide et la notion de tension superficielle sont étudiés dans la première partie, afin de décrire le phénomène d'ascension capillaire et l'influence de la tension superficielle sur la forme géométrique de gouttes de pluie. La deuxième partie propose une étude de l'humidité dans l'air et aborde le fonctionnement de deux capteurs d'humidité, appelés « *hygromètres* ». En dernière partie, une étude de la grêle est conduite et plusieurs modèles sont proposés. Les trois parties de ce sujet sont largement indépendantes mais à l'intérieur de chacune d'elles, il est conseillé d'aborder les questions dans l'ordre proposé.

- *Les applications numériques seront effectuées avec la précision qu'un calcul à la main permet aisément, et (sauf mention contraire) sans excéder deux chiffres significatifs. Les ordres de grandeur seront donnés avec un seul chiffre significatif. Les données numériques ont été choisies pour rendre aisés les calculs.*
- *Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.*
- *Le sujet comporte 18 pages. Les différentes parties sont indépendantes.*

Annexe mathématique

Un ellipsoïde de révolution est une surface de révolution obtenue par rotation dans l'espace d'une ellipse autour de l'un de ses axes de symétrie. Il peut être :

- prolate (allongé) si le grand-axe de l'ellipse est l'axe de rotation générant l'ellipsoïde, ce qui lui donne une forme de ballon de rugby ;
- oblate (aplati) dans le cas contraire, c'est-à-dire si le petit-axe de l'ellipse est l'axe de rotation générant l'ellipsoïde (par exemple la surface de la Terre) ;
- sphérique, dans le cas particulier où l'ellipse génératrice est un cercle.

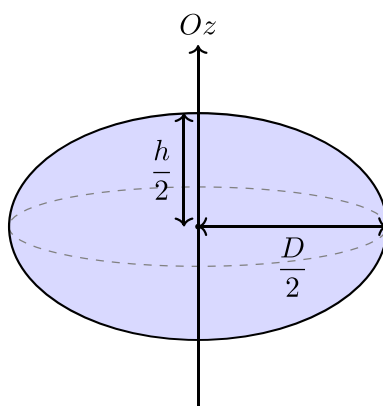


FIGURE 1 – Ellipsoïde de révolution aplati (ou oblate) de demi grand-axe $\frac{D}{2}$ et de demi petit-axe $\frac{h}{2}$. La Terre est, en bonne approximation, assimilable à un ellipsoïde légèrement aplati.

Par analogie avec la fonction trigonométrique tangente, on définit la fonction tangente hyperbolique, notée th . Aucune connaissance d'analyse n'est requise sur cette fonction autre que celles fournies ci-après :

- l'ensemble de définition de th est $\mathbb{R}$ et l'ensemble image est $] -1; 1[$. On donne sa courbe représentative sur la figure 2 :

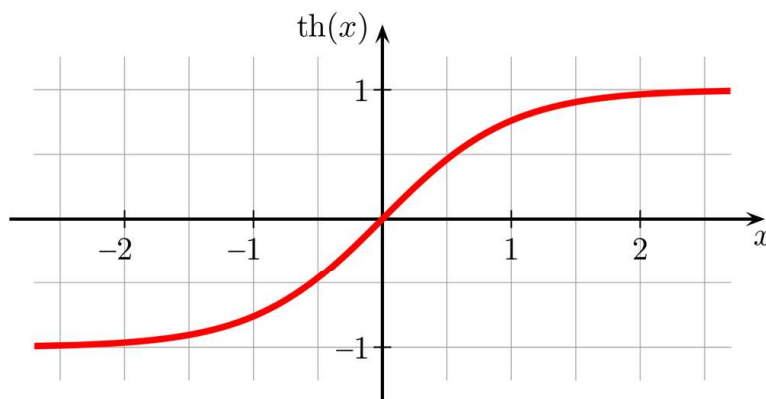


FIGURE 2 – Représentation graphique de la fonction tangente hyperbolique.

- la fonction réciproque de la fonction th , notée argth , est une fonction définie et strictement croissante sur $] -1; 1[$. Par ailleurs, $\text{argth}(0) = 0$ et sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad \text{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Valeurs des constantes

- Constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Tension superficielle de l'eau à 25°C : $\gamma_{\text{eau}} = 72 \text{ mJ} \cdot \text{m}^{-2}$
- Masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Viscosité dynamique de l'air : $\eta_a = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Volume massique de la vapeur d'eau : $v_{\text{vap}} = 1,694 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
- Volume massique de l'eau liquide : $v_{\text{liq}} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
- Enthalpie molaire de vaporisation de l'eau : $\Delta_{\text{vap}} H_m = 42,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Aide aux applications numériques

Les données numériques suivantes pourront être exploitées pour les applications numériques :

$$\exp[42500/8,31 \times (1/373 - 1/288)] \approx 1,7 \times 10^{-2}; \quad 12/1,7 \approx 7; \quad \sqrt{72/9,8} \approx 2,7; \quad 0,6 \times 2 \times 287/298 \approx 1,1;$$

$$\sqrt{(4 \times 9,8 \times 5)/(3 \times 0,8 \times 1,2)} \approx 8,2; \quad \sqrt{2 \times 9,8} \approx 4,4; \quad 1/0,6 \approx 2; \quad 10^4/(6 \times 1,6) \approx 1 \times 10^3.$$

I L'eau à l'état liquide : phénomènes capillaires

À l'état liquide, l'eau présente un ensemble de propriétés intéressantes, et parfois singulières. On peut penser à sa capacité à agir comme solvant pour une large gamme d'espèces chimiques, ou encore à sa tension de surface particulièrement élevée par rapport à la plupart des liquides à température ambiante. Cette valeur élevée de tension de surface permet de mettre facilement en évidence les phénomènes capillaires, auquel un observateur avisé peut avoir accès dans la vie courante.

Le phénomène de tension de surface comporte de nombreuses implications biologiques. C'est elle qui permet à certains insectes, comme les punaises d'eau, de marcher à la surface de l'eau. C'est également elle qui est à l'origine de l'« effet Lotus », qui explique pourquoi, au contact de certaines surfaces végétales (comme les feuilles de lotus) ou animales (comme les plumes de certains oiseaux), l'eau se répartit sous forme de nombreuses gouttes indépendantes les unes des autres, plutôt que sous forme d'un film continu comme sur la plupart des surfaces.

On se propose dans la suite d'étudier divers aspects de la tension de surface.

I.A Tension de surface de l'eau : généralités

Expérimentalement, la tension de surface, notée γ , peut être étudiée à l'aide d'un système simple présenté figure 3. On dépose à la surface d'un cadre une fine membrane de fluide délimitée par trois parois fixes et une paroi mobile, de longueur ℓ .

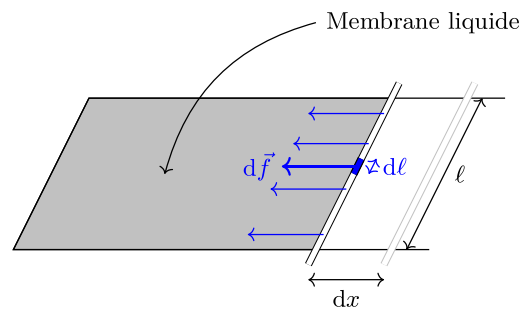


FIGURE 3 – Mise en évidence expérimentale de la tension de surface.

Si l'on cesse de maintenir fixe la paroi mobile, on constate que celle-ci se déplace vers la membrane liquide, de manière à minimiser la surface de la membrane. Cela révèle l'existence de forces dites de *tension superficielle*, ou *forces capillaires* tangentes à la surface de la membrane. On peut également mener d'autres expériences pour confirmer que les forces capillaires sont tangentes à l'interface considérée et réparties de manière uniforme sur cette dernière. Puisque la membrane est constituée de deux interfaces eau/air, on définit dans cette expérience la tension superficielle γ par

$$2\gamma = \frac{\|d\vec{f}\|}{d\ell} . \quad (1)$$

On note $d\ell$ une longueur infinitésimale de la paroi mobile sur laquelle s'applique une force élémentaire $d\vec{f}$, et dx un déplacement élémentaire de la paroi mobile.

1. Justifier que le coefficient de tension superficielle γ a la dimension d'une énergie par unité de surface.
2. Donner l'expression du travail élémentaire $\delta^2 W$ de la force $d\vec{f}$ exercée sur l'élément infinitésimal de la paroi mobile de longueur $d\ell$. En déduire que le travail élémentaire de la force capillaire exercée par la membrane sur l'ensemble de la paroi mobile s'écrit $\delta W = 2\gamma dS$, où dS est la surface balayée par la paroi mobile pendant son déplacement et dont on déterminera l'expression.

On cherche à estimer numériquement un ordre de grandeur du coefficient de tension superficielle. On raisonne dans la suite sur une seule molécule de l'interface, dont l'énergie mécanique est notée $\mathcal{E}$. Pour un gaz parfait monoatomique, on peut montrer qu'il existe une relation entre l'énergie cinétique moyenne d'une molécule du gaz $\langle \mathcal{E}_{c, \text{mol}} \rangle$ et la température T du gaz considéré :

$$\langle \mathcal{E}_{c, \text{mol}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (2)$$

3. On prendra comme ordre de grandeur typique pour $\mathcal{E}$ l'énergie cinétique moyenne d'une molécule de taille caractéristique a d'un gaz parfait monoatomique. Montrer qu'en ordre de grandeur $\gamma \sim k_B T / a^2$. Pour l'eau à 25 °C, on donne $a = 3 \text{ \AA}$ et $k_B T = 4 \times 10^{-21} \text{ J}$. Comparer l'ordre de grandeur obtenu par le calcul et la valeur de la tension superficielle de l'eau tabulée, et conclure sur la validité du raisonnement.

On introduit une longueur caractéristique, appelée « *longueur capillaire* » et notée ℓ_c , permettant de quantifier l'échelle spatiale sur laquelle les effets de tension superficielle peuvent se manifester.

4. Par analyse dimensionnelle, montrer qu'on peut construire cette longueur en fonction uniquement de la masse volumique de l'eau ρ , de la tension de surface γ et de l'accélération de la pesanteur g . À température ambiante, estimer numériquement la longueur capillaire pour l'eau.

I.B Équilibre statique de l'ascension capillaire

Le terme « capillarité » trouve son étymologie dans le latin *capillaris* qui désigne ce qui est relatif aux cheveux. En l'occurrence, des phénomènes singuliers peuvent être observés dans des tubes capillaires, dont la finesse rappelle celle d'un cheveu. Par exemple, lorsqu'on immerge un cylindre creux (typiquement de rayon égal à quelques dixièmes de millimètre) dans un cristalliseur contenant de l'eau, on observe que l'eau monte à l'intérieur de ce tube. Cette montée capillaire est schématisée sur la figure 4.

Dans les questions suivantes, on considère le système $\Sigma = \{\text{cristalliseur} + \text{tube cylindrique capillaire} + \text{eau}\}$.

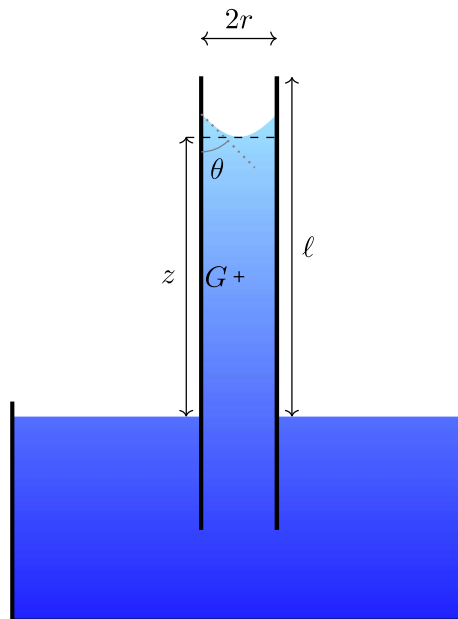


FIGURE 4 – Schéma illustrant le phénomène d'ascension capillaire de l'eau dans un tube cylindrique. Le diamètre du tube est $2r$. L'interface liquide-air matérialisant le ménisque forme un angle θ avec la paroi du cylindre au niveau du raccordement.

5. Justifier qu'il est raisonnable de considérer que l'introduction du tube capillaire dans le récipient ne fait pas varier l'altitude de l'interface eau/air dans le cristalliseur.

Pour les mêmes raisons, on suppose que l'aire de l'interface eau/air dans le cristalliseur ne varie pas après introduction du tube dans le cristalliseur.

On note z l'altitude du bas du ménisque de la colonne de liquide dans le capillaire. La référence est celle du niveau d'eau dans le cristalliseur ($z = 0$). Le capillaire est de longueur émergée ℓ , supposée constante, et de rayon r . On désigne par θ l'angle de raccordement, à l'intérieur du capillaire, entre la paroi en verre du capillaire et l'interface liquide-air.

La relation entre la hauteur h de la colonne de liquide dans le capillaire, prise entre le bas du ménisque et le niveau de liquide dans le cristalliseur, et les différents paramètres du problème donne la loi de JURIN. On adopte une approche énergétique pour déterminer la hauteur h de l'ascension capillaire. L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système Σ est la somme de :

- son énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp}$;
- son énergie potentielle de surface $\mathcal{E}_{ps}$.

On suppose que les énergies potentielles de pesanteur et de surface sont nulles avant l'introduction du tube dans le cristalliseur. On rappelle qu'à l'interface entre deux phases 1 et 2, l'énergie potentielle de surface $\mathcal{E}_{ps}$ vérifie

$$\mathcal{E}_{ps} = \gamma_{12} \mathcal{A}_{12} , \quad (3)$$

avec $\mathcal{A}_{12}$ l'aire de l'interface et γ_{12} la tension superficielle entre les phases 1 et 2. On introduit γ_{SL} la tension superficielle entre l'eau et le verre constituant le tube cylindrique et γ_{SV} la tension superficielle entre le verre et l'air.

6. En supposant que le centre de gravité de l'eau présente dans le tube cylindrique est situé à $z/2$, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp}$ du système après introduction du tube cylindrique en fonction de la masse volumique ρ de l'eau, de l'intensité de la pesanteur g et des paramètres géométriques du problème. On négligera la masse du tube cylindrique devant la masse d'eau qu'il contient.
7. Après introduction du tube cylindrique dans le cristalliseur, exprimer l'aire $\mathcal{A}_{SL}$ de l'interface eau/verre créée en fonction des paramètres géométriques. On négligera la partie située au-dessus de la ligne en tirets sur la figure 4 pour le calcul. Exprimer de même l'aire $\mathcal{A}_{SV}$ de l'interface air/verre créée à l'intérieur du capillaire.
8. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de surface du système après l'introduction du tube cylindrique dans le cristalliseur. On fera apparaître le terme $\gamma_{SL} - \gamma_{SV}$ dans l'expression. En déduire que l'énergie potentielle totale se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_p(z) = z \left(\rho \pi r^2 g \frac{z}{2} + 2\pi r (\gamma_{SL} - \gamma_{SV}) \right) + C^{\text{te}} . \quad (4)$$

L'équation (4) décrit une fonction de la seule hauteur z d'eau dans le tube cylindrique, tous les autres paramètres étant des constantes du problème. Autrement dit, cela revient à étudier la position de l'interface eau/air dans le tube cylindrique.

9. Rappeler la condition sur l'énergie potentielle permettant de définir une position d'équilibre.
10. En déduire l'expression de la position d'équilibre, notée h , en fonction de r , ρ , g et $\gamma_{SV} - \gamma_{SL}$.

La loi de YOUNG-DUPRÉ permet de relier l'angle θ aux différentes tensions superficielles :

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma} . \quad (5)$$

11. En déduire l'expression de h en fonction de r , ρ , g , γ et θ . Montrer que la hauteur h s'exprime en fonction de la longueur capillaire ℓ_c .

Les approximations dans les calculs des surfaces à la question 7 ne sont valides que si $r \ll h$.

12. Montrer que cette condition impose $r \ll \ell_c$. Commenter.

I.C Géométrie et vitesse des gouttes de pluie

Lorsque les seuls phénomènes capillaires sont pris en compte, la forme géométrique d'équilibre d'une goutte est celle d'une sphère, minimisant la surface pour un volume donné. Par ailleurs, dans le cadre de cette modélisation, la vitesse de chute est d'autant plus élevée que la goutte est grande¹.

Dans cette partie, nous conduisons une étude pour vérifier si ces propriétés demeurent vraies pour des gouttes de pluie chutant dans l'air. Les applications numériques seront menées en considérant que l'air est un fluide de masse volumique ρ_a et de viscosité dynamique η_a , dont les valeurs sont rappelées au début du sujet.

I.C.a Protocole expérimental de mesure des caractéristiques des gouttes

Expérimentalement, on peut réaliser cette étude en disposant un entonnoir rempli d'eau au sommet d'un édifice d'une vingtaine de mètres de haut. Le bas de l'entonnoir utilisé a un diamètre de quelques mm. Tout comme pour l'eau s'écoulant d'un robinet, les gouttes générées par ce dispositif sont de tailles hétérogènes, typiquement réparties autour de quelques millimètres, en raison de l'instabilité de PLATEAU-RAYLEIGH.

On place alors une caméra ultra-rapide, permettant d'acquérir 1000 images par seconde en ordre de grandeur, comme sur la figure 5. Pour chaque image, la caméra ultra-rapide laisse passer la lumière pendant un temps suffisamment court pour que la goutte apparaisse immobile sur l'image en question : c'est le *temps de pose*.

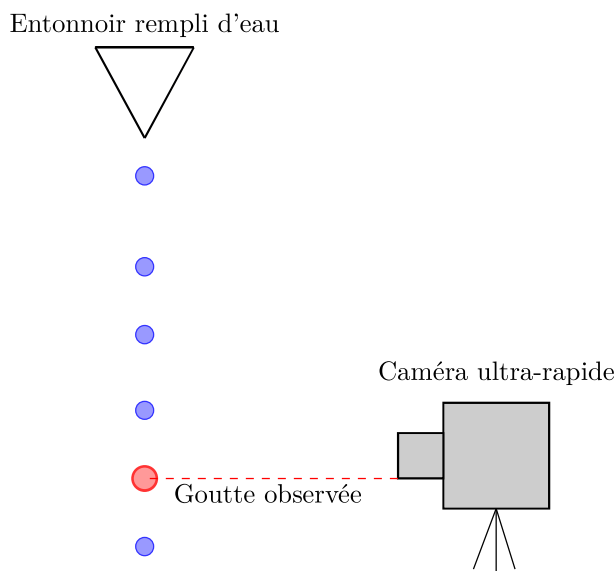


FIGURE 5 – Dispositif expérimental utilisé pour mesurer les caractéristiques des gouttes de pluie.

1. En effet, pour une goutte sphérique de rayon R , le poids est proportionnel à R^3 alors que la résultante des forces de frottements est proportionnelle à R^2 .

À l'issue d'un régime transitoire que l'on négligera dans la suite de l'étude, la vitesse de la goutte de pluie atteint un régime permanent. On notera v_∞ la valeur de la norme de cette vitesse, que l'on désignera par *vitesse limite*.

13. En considérant que la vitesse limite typique des gouttes de pluie est de l'ordre de $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, proposer un ordre de grandeur de temps de pose de la caméra ultra-rapide en justifiant les étapes du raisonnement.
14. La caméra est réglée de manière à couvrir une hauteur de chute de 30 cm. À combien de positions d'une goutte donnée pourra-t-on typiquement avoir accès avec ce réglage ?

Les images obtenues permettent de définir pour chaque goutte sa hauteur h et son diamètre équatorial D , comme le montre schématiquement la figure 6. Les images de la figure 7 ont été prises après 8 m à 12 m de chute, ce qui assure que les gouttes ont atteint leur vitesse limite.

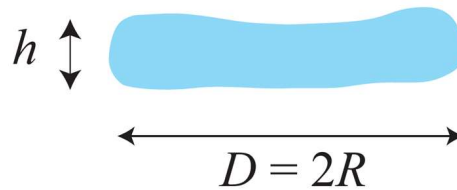


FIGURE 6 – **Schéma des paramètres géométriques définis pour chaque goutte étudiée.** Les gouttes étudiées présentent toutes une symétrie de révolution autour de l'axe vertical (Oz) (le schéma ne représentant pas cette symétrie de révolution) : la longueur de la goutte selon cet axe, qui peut être vue comme l'épaisseur de la goutte, est notée h . Dans le plan orthogonal à cet axe, on définit le diamètre équatorial noté D .

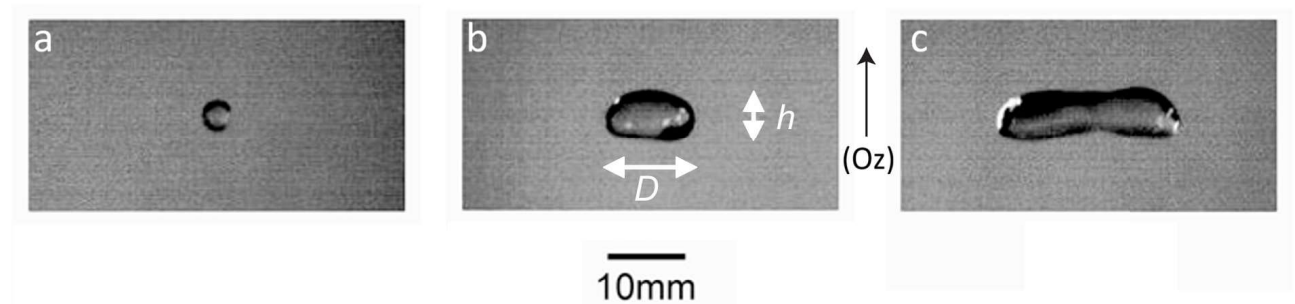


FIGURE 7 – **Forme géométrique de trois gouttes de pluie dans l'air de rayon R et de hauteur h différents.** La goutte de la photographie a) possède un diamètre équatorial plus petit que la longueur capillaire, celle de la photographie b) a un diamètre équatorial comparable à la longueur capillaire et celle de la photographie c) est de diamètre équatorial plus grand que la longueur capillaire.

15. Après avoir rappelé sa définition, estimer un ordre de grandeur caractéristique du nombre de REYNOLDS dans cette expérience. Commenter la prise en compte ou non des effets visqueux par rapport aux effets inertiels dans cette expérience.

Dans toute la suite, on négligera également la poussée d'ARCHIMÈDE qui s'exerce sur une goutte de pluie.

I.C.b Premier cas : goutte sphérique

Dans le cas d'une goutte sphérique de rayon R , compte tenu de la valeur du nombre de REYNOLDS, la norme de la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Son expression

est la suivante :

$$F_t = \frac{1}{4} \rho_a S v^2, \quad (6)$$

avec S la surface projetée de la goutte, qui correspond à un disque de rayon R .

16. Outre la force de traînée, préciser quelle force s'exerce sur une goutte d'eau lors de sa chute. On exprimera sa norme en fonction, notamment, du rayon R de la goutte.
17. En considérant que le régime établi est atteint, montrer que la vitesse limite v_∞ de la goutte est donnée par

$$v_\infty = \sqrt{\frac{16\rho g R}{3\rho_a}}. \quad (7)$$

Comme le montre la figure 7, on admet que les gouttes restent sphériques tant que leur taille caractéristique (donnée par le diamètre équatorial) est plus faible que la longueur capillaire ℓ_c .

I.C.c Deuxième cas : goutte ellipsoïdale

Lorsque la goutte a une taille caractéristique comparable à la longueur capillaire, on peut la modéliser par un ellipsoïde de révolution oblate de demi grand-axe $D/2$ et de demi petit-axe $h/2$, dont une représentation est donnée en préambule, figure 1. On admet alors que son volume est donné par $V = \frac{1}{6}\pi D^2 h$ et que la surface projetée, suivant l'axe vertical (Oz), vaut $S = \frac{\pi}{4} D^2$. Dans ce cas, la norme de la force de traînée a pour expression

$$F_t = \frac{1}{2} \rho_a C S v^2, \quad (8)$$

avec C un coefficient strictement positif, appelé *coefficient de traînée*, sans unité.

18. Exprimer la vitesse limite en fonction des paramètres de l'énoncé. Commenter l'expression obtenue, notamment sa dépendance vis-à-vis des paramètres géométriques.

La figure 8 rend compte de la variabilité de formes de gouttes observées lors des expériences de chute libre. Les expériences donnant lieu à des états stationnaires, *i.e.* des chutes pour lesquelles les gouttes conservent leur forme et leur vitesse limite durant la durée d'observation, correspondent aux disques pleins de couleur noire. **Les autres symboles (losanges, carrés et triangles) vides correspondent à des expériences présentant des instabilités dynamiques (changements de forme et de vitesse au cours de la chute) et sont exclus de la présente étude.**

19. Lorsque le diamètre équatorial est inférieur à la longueur capillaire, et à partir de la figure 8, justifier la forme de la goutte. À l'aide de la figure 8, donner une estimation numérique de la hauteur h de la goutte lorsque son diamètre équatorial est supérieur à la longueur capillaire. On pourra confronter cette valeur à l'information pouvant être extraite de la figure 7.
20. En déduire la valeur de la vitesse limite pour une goutte ellipsoïdale. On prendra $C = 0,8$.

Sur la figure 9, on représente la dépendance de la vitesse limite avec le diamètre équatorial de la goutte de pluie. Cette figure ne fait apparaître que les cas stationnaires de la figure 8 (disques pleins).

21. Identifier les différents régimes sur la figure 9 en précisant brièvement leurs caractéristiques. Commenter ces différents régimes en confrontant aux résultats des études dynamiques précédentes.

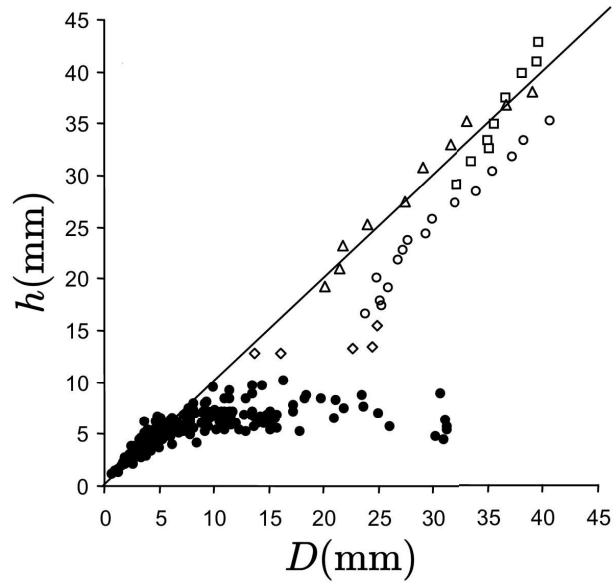


FIGURE 8 – Représentation graphique de la morphologie des gouttes lors des expériences de chute. On trace la hauteur h en mm des gouttes en fonction de leur diamètre équatorial D en mm. La droite correspond au cas où $h = D$.

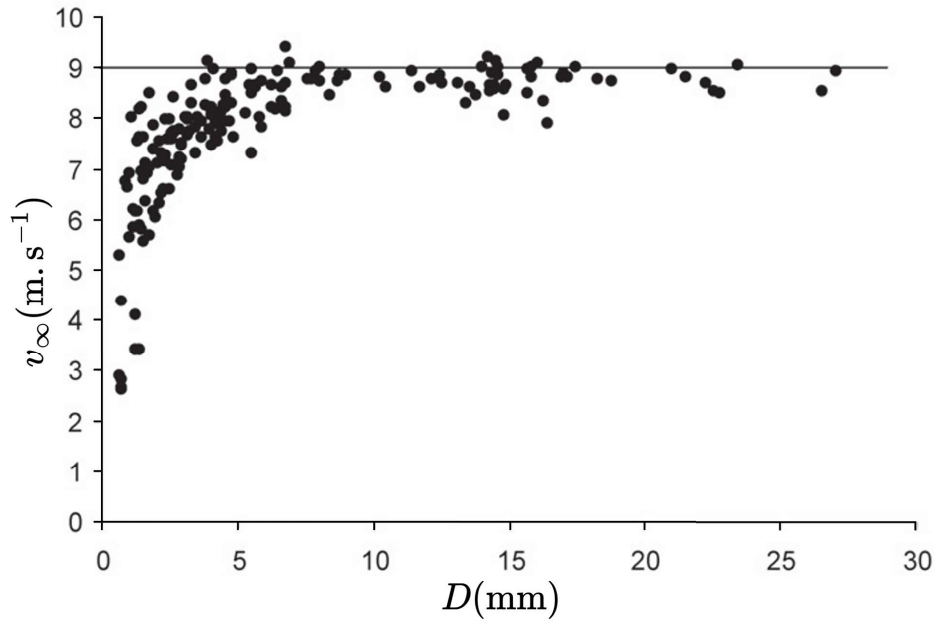


FIGURE 9 – Représentation graphique de la vitesse limite v_{∞} des gouttes de pluie en fonction de leur diamètre équatorial D . La vitesse est en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et le diamètre en mm.

Les phénomènes capillaires jouent donc un rôle essentiel dans les différents comportements observés puisque la forme de la goutte - qui résulte d'une compétition entre l'inertie (*via* la force de traînée) et la tension de surface - influe directement sur la valeur de la vitesse mesurée. L'étude des cas non-stationnaires pourrait permettre d'étudier l'influence de la déformation de la goutte au cours du mouvement sur les caractéristiques de la chute mais cette étude ne sera pas abordée ici.

II L'eau à l'état gazeux : mesurer l'humidité dans l'air

On s'intéresse désormais à l'eau sous forme de vapeur et à son équilibre diphasique entre des phases vapeur et liquide. Une étude de quelques méthodes de mesures de la quantité d'humidité dans l'air est également proposée.

II.A Dépendance de la pression de vapeur saturante avec la température

Un diagramme (P,T) donne l'état thermodynamique d'un corps pur et rassemble les domaines d'existence des états (phases) sous certaines conditions de pression et de température. On observe également les domaines de co-existence de plusieurs phases. La figure 10 donne le diagramme (P,T) de l'eau.

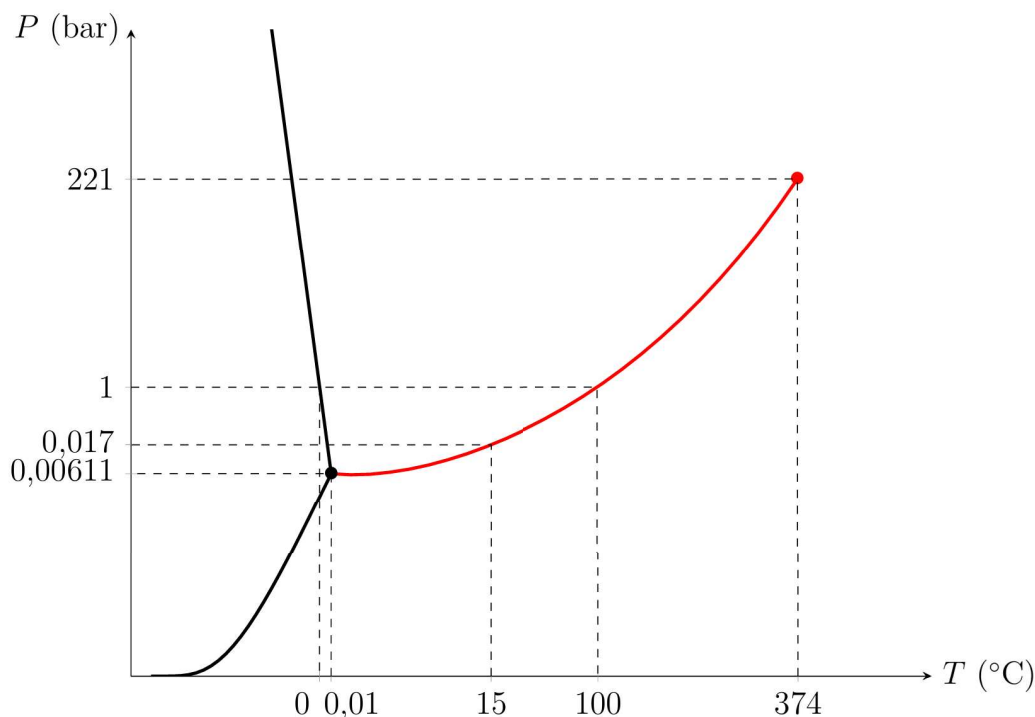


FIGURE 10 – Diagramme (P,T) de l'eau (échelle arbitraire).

22. Associer à chaque domaine de stabilité du diagramme les états : *solide*, *liquide*, *gaz* et *fluide supercritique* de l'eau. Nommer également les deux points repérés sur la figure 10. On prendra soin de représenter le diagramme sur la copie.
23. Pour un système contenant de l'eau à la température T , rappeler la définition de la *vapeur saturante*. Préciser le lien entre la *pression de vapeur saturante* P_{sat} et la portion du diagramme (P,T) comprise entre les deux points précédemment repérés.

On s'intéresse à l'évolution de la pression de vapeur saturante avec la température. Pour ce faire, on donne la formule de CLAPEYRON qui relie la pression de vapeur saturante P_{sat} à la température T , à l'enthalpie massique de vaporisation $\Delta_{\text{vap}}h$ et aux volumes massiques de l'eau liquide v_{liq} et de la vapeur d'eau v_{vap} selon la formule

$$\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{\Delta_{\text{vap}}h}{T(v_{\text{vap}} - v_{\text{liq}})} . \quad (9)$$

24. Justifier pourquoi on peut, en bonne approximation, utiliser la forme simplifiée de la formule de CLAPEYRON :

$$\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{\Delta_{\text{vap}}h}{Tv_{\text{vap}}} . \quad (10)$$

On utilisera dans la suite la forme simplifiée de la formule de CLAPEYRON.

25. En supposant que l'eau se comporte comme un gaz parfait, montrer que l'on obtient la relation de CLAUSIUS-CLAPEYRON

$$\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{P_{\text{sat}}\Delta_{\text{vap}}H_{\text{m}}}{RT^2} , \quad (11)$$

où $\Delta_{\text{vap}}H_{\text{m}}$ désigne l'enthalpie molaire de vaporisation.

26. On considère que l'enthalpie molaire de vaporisation de l'eau $\Delta_{\text{vap}}H_{\text{m}}$ est indépendante de la température pour les températures typiques de cette étude. En utilisant la formule de CLAUSIUS-CLAPEYRON, montrer qu'on retrouve la formule de RANKINE

$$\ln \left(\frac{P_{\text{sat}}}{P^{\circ}} \right) = A - \frac{B}{T} , \quad (12)$$

avec P° la pression atmosphérique, A et B des coefficients que l'on exprimera en fonction notamment de $T_{\text{éb}}$ la température d'ébullition de l'eau à la pression atmosphérique P° et de l'enthalpie molaire de vaporisation de l'eau $\Delta_{\text{vap}}H_{\text{m}}$.

27. Calculer la valeur numérique de la pression de vapeur saturante pour $T_0 = 288 \text{ K}$. Conclure sur la validité de la formule de RANKINE à cette température.

II.B Humidité relative et hygrométrie

On continuera dans cette partie à faire l'hypothèse que l'eau se comporte comme un gaz parfait.

II.B.a Pression partielle et humidité relative

La pression partielle en eau $P_{\text{H}_2\text{O}}$ nous renseigne sur la quantité de vapeur d'eau présente dans l'air.

28. Exprimer la masse de vapeur d'eau m_{vap} présente dans un volume V d'air donné en fonction du volume V , de la pression partielle $P_{\text{H}_2\text{O}}$, de la température T et de la masse molaire de l'eau $M_{\text{H}_2\text{O}}$.

L'humidité relative de l'air φ est définie comme le rapport entre la pression partielle en eau et la pression de vapeur saturante :

$$\varphi = \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_{\text{sat}}(T)} . \quad (13)$$

On exprime le plus souvent φ en pourcentage.

29. À l'équilibre thermodynamique, déterminer la valeur numérique de l'humidité relative pour une vapeur saturante.
30. À la fin d'une journée d'été, on mesure une température de l'air $T = 25^\circ\text{C}$ et une humidité relative $\varphi = 60\%$. La pression de vapeur saturante de l'eau à 25°C est $P_{\text{sat}}(T) = 32\text{ mbar}$. Pendant la nuit, la température de l'air chute jusqu'à atteindre $T' = 14^\circ\text{C}$ au lever du soleil. Sachant que $P_{\text{sat}}(T') = 16\text{ mbar}$, déterminer l'humidité relative φ' à cette température (on raisonnera sur un système constitué d'un volume V d'air humide que l'on supposera fermé). Comment cela se manifeste-t-il ?

II.B.b Hygromètre à cheveux

Très utilisée en météorologie, l'humidité relative peut être mesurée grâce à des systèmes divers, dont la création remonte pour certains au XVIII^e siècle. C'est le cas notamment de l'hygromètre à cheveux, un hygromètre mécanique reposant sur la variation de la longueur d'un cheveu avec l'humidité relative : le cheveu se dilate quand l'humidité augmente et se rétracte quand l'humidité diminue. Cela provient de la structure du cheveu, constitué de kératine, une protéine dont la structure tridimensionnelle est une hélice stabilisée par des interactions par pont hydrogène. Lorsque ces interactions sont modifiées ou que leur nombre diminue, la kératine peut adopter une conformation plus étendue, appelée structure en *feuille*, dans laquelle les interactions par pont hydrogène sont organisées différemment.

31. En se plaçant à l'échelle moléculaire, proposer une explication physique justifiant pourquoi la longueur du cheveu augmente avec l'humidité relative.

La figure 11 rend compte des résultats d'une expérience ayant permis de mesurer la longueur L_0 d'un cheveu totalement sec puis l'élongation ΔL de ce cheveu en fonction de l'humidité relative.

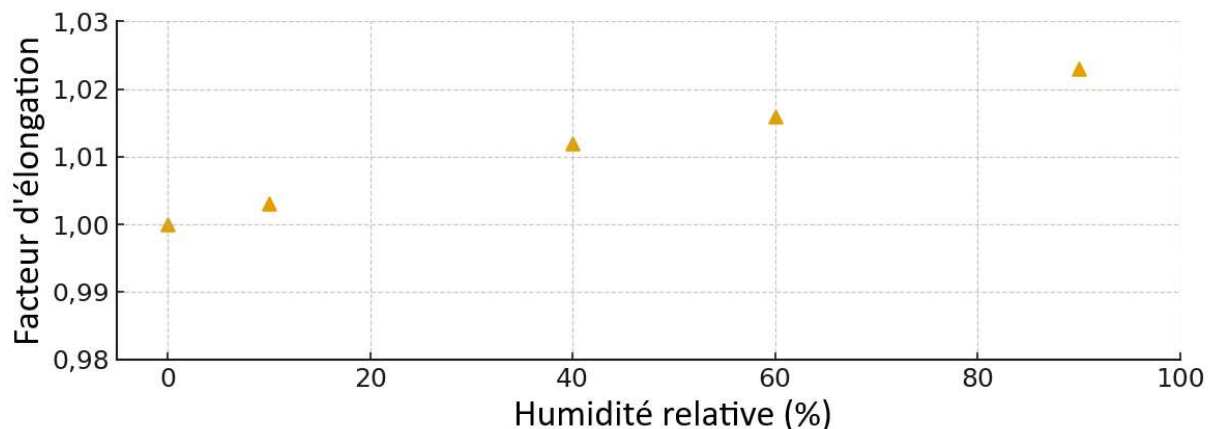


FIGURE 11 – Facteur d'élongation $(L_0 + \Delta L)/L_0$ d'un cheveu en fonction de l'humidité relative φ .

32. On considère un cheveu de longueur 3 cm lorsque l'air est sec. Déterminer la valeur numérique de variation de longueur lorsque l'air est saturé en vapeur d'eau.

En rassemblant les cheveux en un faisceau constitué de plusieurs centaines de cheveux, on peut produire une force suffisante pour venir pousser sur une petite aiguille dont la pointe indique le taux d'humidité. La variation d'angle de l'aiguille par rapport à un angle de référence dépend donc directement du taux d'humidité relative *via* les cheveux qui agissent comme des capteurs d'humidité.

33. La constante de temps de l'hygromètre à cheveux est d'environ 10 s. Après avoir défini la constante de temps τ d'un système linéaire du premier ordre, et notamment le critère pour atteindre le régime établi, commenter la valeur obtenue au regard de l'utilisation souhaitée de l'hygromètre à cheveux.

II.B.c Hygromètre capacitif

La capacité d'un condensateur dépend de la permittivité diélectrique ε du milieu séparant ses deux armatures. En utilisant des matériaux bien choisis, on peut obtenir une capacité de la forme

$$C = C_0(1 + \alpha\varphi) , \quad (14)$$

avec C_0 la capacité du condensateur lorsque l'air est sec, α un coefficient sans dimension et φ l'humidité relative. Par exemple, la figure 12 donne l'évolution de la capacité en fonction de l'humidité relative pour un condensateur constitué d'un diélectrique (matériau isolant) conçu à partir de polyimide modifié, un matériau connu pour ses propriétés diélectriques et sa stabilité thermique élevée.

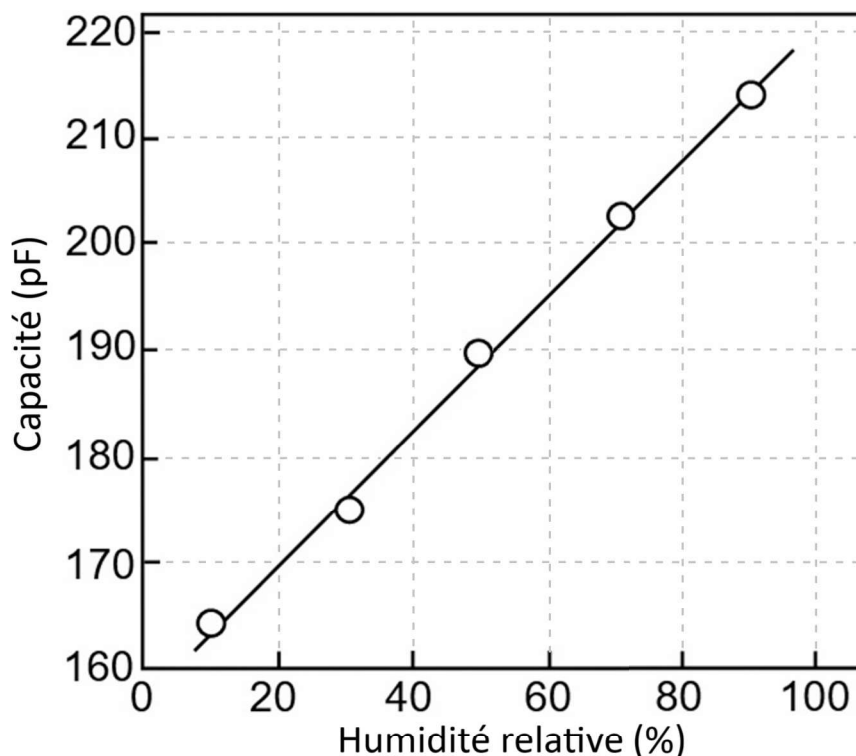


FIGURE 12 – Capacité du condensateur en fonction de l'humidité relative.

- 34.** Estimer les valeurs numériques des constantes C_0 et α pour le condensateur utilisé pour l'expérience dont les résultats sont présentés sur la figure 12.

On se propose de mesurer la capacité C à l'aide d'un microcontrôleur. Pour cela, on réalise un circuit électrique composé d'une résistance $R = 3 \text{ M}\Omega$ en association série avec le condensateur précédemment évoqué.

- 35.** Dans un premier temps, on suppose qu'à $t = 0$, on soumet l'association RC série à un échelon de tension E . En supposant le condensateur déchargé à $t < 0$, établir l'expression de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ en fonction de E et τ_{RC} , une constante que l'on identifiera. *Préalablement à tout calcul, on réalisera un schéma et on choisira les conventions d'orientation des tensions adéquates. Une attention particulière devra être apportée aux étapes de la mise en équation et de la résolution.*
- 36.** Déterminer l'ordre de grandeur du temps nécessaire à la charge complète du condensateur. Commenter la valeur obtenue relativement à la contrainte d'une mesure de l'humidité relative. *On prendra $C = 200 \text{ pF}$ comme valeur typique pour la capacité du condensateur.*

On souhaite déterminer la capacité C par une mesure du temps τ_{RC} en utilisant le fait que $u_C(t = \tau_{RC}) = 0,63E$. Pour ce faire, on programme le micro-contrôleur de manière à effectuer une mesure de la tension à intervalles de temps régulier. L'écart temporel entre deux mesures de tension est appelé *période d'échantillonnage* et est noté T_e . On fixe un seuil de tension égal à $0,63E$: le micro-contrôleur renvoie alors le temps pour lequel la tension dépasse ce seuil.

- 37.** Expliquer la méthode d'échantillonnage à l'aide d'une représentation graphique de l'évolution temporelle de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur. Proposer ensuite une valeur de fréquence f_e d'échantillonnage permettant de réaliser la mesure de la capacité C en relevant une centaine de points entre $t = 0$ et $t = \tau_{RC}$.

Dans le cas où l'on souhaite obtenir plus d'une mesure unique d'humidité relative, on peut aussi régler le micro-contrôleur de manière à ce qu'il soumette l'association RC série à une tension crête afin d'obtenir le relevé de l'humidité relative en fonction du temps. Cela peut s'avérer très utile dans le cas d'applications industrielles ou de recherche dans lesquelles les variations d'humidité relative sont proscrites.

- 38.** En justifiant le raisonnement, proposer un ordre de grandeur de la fréquence maximale du signal crête que l'on peut fixer pour conserver le principe de fonctionnement décrit dans les questions précédentes.
- 39.** Le protocole précédent permettait d'extraire l'instant pour lequel la tension mesurée dépassait $0,63E$. Autrement dit, le protocole détermine le temps auquel la tension atteint $0,63E$ en front montant. Pour améliorer le suivi temporel des variations de l'humidité relative, proposer une instruction à ajouter au programme du micro-contrôleur dans la configuration signal crête.

En réalité, l'obtention de la capacité C réelle du dispositif de mesure se révèle plus délicate que ce que permet la méthode précédente. En raison de la faible valeur de C , on ne peut pas négliger la capacité interne du micro-contrôleur par rapport à cette dernière. Néanmoins, le principe de mesure reste le même, quitte à réaliser une courbe d'étalonnage au préalable.

III L'eau à l'état solide : chute de grêle dans l'atmosphère

Dans cette dernière partie, on se propose d'étudier la chute de boules d'eau solide (glace), appelées *grêlons*. La *grêle* est un phénomène météorologique redouté en raison des effets potentiellement destructeurs qu'elle peut engendrer.

III.A Première modélisation : chute libre

Dans toute cette sous-partie, on se place dans le modèle de la chute libre.

- 40.** Rappeler la définition d'une chute libre. Quelle(s) est (sont) la (les) trajectoire(s) possible(s) pour un corps en chute libre ?
- 41.** En détaillant la démarche utilisée et les hypothèses réalisées, déterminer la vitesse d'impact au sol d'un grêlon se détachant d'un cumulonimbus à 10 km d'altitude. Commenter la valeur obtenue à partir d'une comparaison avec la célérité des ondes acoustiques dans l'air.

En réalité, on mesure des vitesses d'impact au sol de l'ordre de $50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pour les plus gros grêlons. Il est donc nécessaire de procéder à une seconde modélisation, plus adaptée à la situation étudiée.

III.B Prise en compte des frottements fluides de l'atmosphère

On va désormais considérer que les grêlons sont soumis à une force de frottements fluides de la forme

$$\vec{f} = -\kappa v \vec{v}, \quad (15)$$

avec κ un coefficient strictement positif et $v = \|\vec{v}\|$ la norme du vecteur vitesse. La poussée d'ARCHIMÈDE sera quant à elle négligée devant le poids compte tenu des ordres de grandeur des masses volumiques de l'atmosphère et de la glace.

42. Déterminer la dimension du coefficient κ .
43. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$.
44. Donner l'expression vectorielle de la vitesse atteinte en régime permanent, appelée *vitesse limite*, puis commenter l'influence de la masse du grêlon sur la vitesse limite si l'on suppose que le coefficient κ ne dépend pas de la masse m du grêlon.

En réalité, dans l'hypothèse où le grêlon reste sphérique de rayon R , κ est proportionnel au carré du rayon du grêlon : $\kappa \propto R^2$. On suppose dans toute la suite la masse volumique du grêlon constante ; on la note ρ_{glace} .

45. Après avoir établi la dépendance de la masse m du grêlon avec le rayon R , démontrer que κ est proportionnel à m^α , avec α une constante à déterminer.
46. Discuter qualitativement et quantitativement la manière dont la prise en compte de la dépendance de κ avec la masse m du grêlon modifie l'influence de la masse sur la vitesse limite. *On pourra montrer que la vitesse limite est proportionnelle à m^β , où β est une constante réelle à préciser.*

III.B.a Chute avec vitesse initiale nulle

On suppose, tout comme dans la partie III.A, que le grêlon a une vitesse initiale nulle. Dans ce cas, il s'agit d'un mouvement à un degré de liberté dans la direction de l'accélération de la pesanteur. En notant $\vec{e}_z$ la verticale **descendante**, on note z l'unique coordonnée du grêlon et v_z la vitesse du grêlon.

47. Montrer que l'équation différentielle établie à la question 43 se réécrit :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{\kappa}{m} v_z^2 = g. \quad (16)$$

48. À partir de l'équation précédente, montrer que, tant que le grêlon n'a pas atteint le sol, la vitesse v_z s'exprime simplement en fonction de la fonction tangente hyperbolique th , de g et de τ_q , un temps caractéristique que l'on exprimera en fonction de κ , g et m .
49. L'expression obtenue est-elle cohérente avec le résultat de la question 44 ?

III.B.b Chute avec vitesse initiale non nulle

En réalité, les cumulonimbus sont des nuages soumis à d'intenses courants d'air qui déplacent les gouttes d'eau horizontalement et verticalement. On va donc dans toute la suite supposer, qu'en plus de la coordonnée z , le mouvement du grêlon doit être décrit selon une coordonnée x , telle que la vitesse initiale du grêlon puisse se décomposer comme suit :

$$\vec{v}_0 = v_{x,0} \vec{e}_x + v_{z,0} \vec{e}_z, \quad (17)$$

avec $\vec{e}_x$ un vecteur unitaire orthogonal au vecteur $\vec{e}_z = \frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|}$ utilisé dans la sous-partie précédente. On admet que le mouvement a lieu dans un plan de vecteurs directeurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$.

- 50.** Écrire les deux équations scalaires obtenues en projetant l'équation différentielle obtenue à la question **43** sur chacun des vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$. Après avoir exprimé v en fonction de v_x et v_z , justifier si ces équations sont indépendantes.

La structure du système d'équations ne permet pas d'envisager, comme dans le cas précédent, une résolution analytique. On procède donc à une résolution numérique du système d'équations différentielles en utilisant la *méthode d'EULER*. Cette dernière est une méthode de calcul itérative permettant de déterminer numériquement une solution approchée d'une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle pour la fonction y de variable t de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) , \quad (18)$$

avec la condition initiale $y(t = 0) = y_0$.

- **Première étape :** on divise l'intervalle de temps à explorer T en N sous-intervalles de durée $dt = \frac{T}{N}$ et on définit les instants de date $t_i = idt$, où i est un entier variant de 0 à N .
- **Deuxième étape :** dans la méthode d'EULER explicite, la valeur approchée à l'instant t_{i+1} de la fonction y est obtenue à partir de la précédente *via* la relation de récurrence :

$$y_{i+1} = y_i + dt \times f(t_i, y_i)$$

avec $0 \leq i < N$.

- 51.** La description de la méthode évoque l'obtention d'une valeur *approchée*. Quelle approximation est réalisée dans cette méthode de résolution ?

On se propose de programmer la méthode d'EULER explicite en utilisant Python pour la résolution de l'équation différentielle dans le cas où la vitesse initiale du grêlon est non colinéaire à l'accélération de la pesanteur. Un extrait du code utilisé est présenté ci-après. Les grandeurs physiques pertinentes (position, vitesse, accélération) sont adimensionnées.

```

1  def acc(vx,vz):
2      """
3      Prend en paramètre la vitesse à un instant donné
4      et renvoie les accélérations selon x et z
5      """
6      norme_v = np.sqrt(vx**2 + vz**2)
7      acc_x = ???
8      acc_z = -norme_v*vz/g
9      return acc_x, acc_z
10
11 def euler(t_min,t_max,N,h,vx0,vz0):
12     """
13     Intègre les équations du mouvement selon le schéma d'Euler.
14     Les dates d'intégrations sont définies dans t_min, t_max ;
15     le nombre de pas de temps est N ;
16     les conditions initiales h,vx0,vz0.
17     Renvoie des tableaux t,vx,vz,x et z.
18     """
19     # création de tableaux vides des vitesses et positions
20     # à (N + 1) éléments
21     tab_vx, tab_vz, tab_x, tab_z = np.zeros(N), np.zeros(N), np.zeros(N), np.zeros(N)
22     tab_t = np.linspace(t_min,t_max,N)
23     # affectation des conditions initiales au premier élément du tableau
24     tab_vx[0], tab_vz[0], tab_x[0], tab_z[0] = vx0, vz0, 0, h
25     dt = (t_max - t_min) / N # calcul de dt
26     for i in range(N-1): # boucle de calcul des vitesses approchées
27         acc_x, acc_z = acc(tab_vx[i], tab_vz[i])
28         tab_vx[i+1] = ???
29         tab_vz[i+1] = ???
30         tab_x[i+1] = tab_vx[i]* dt + tab_x[i]
31         tab_z[i+1] = tab_vz[i]* dt + tab_z[i]
32     return tab_t, tab_vx, tab_vz, tab_x, tab_z

```

52. Compléter la ligne 7 du programme.

La fonction `np.zeros(N)` renvoie une liste de N valeurs toutes nulles, de type « array ».

53. En utilisant les informations fournies sur la méthode d'EULER, compléter les lignes 28 et 29.

54. Les lignes 26 à 32 contiennent une boucle itérative dans laquelle la commande « for » est utilisée. Modifier ces lignes de façon à utiliser la commande « while » en créant une boucle conditionnelle, sans toutefois modifier les résultats renvoyés par les lignes réécrites.

55. Sans effectuer de calcul numérique, expliquer qualitativement ce qu'il se passe sur l'évolution des vitesses et la trajectoire obtenue si le pas de temps `dt` choisi est trop grand.

Les autres parties du code non reproduites, notamment l'import des modules Python utiles, la définition des constantes physiques et des conditions initiales, ainsi que le tracé des courbes, permettent d'obtenir l'évolution des vitesses selon les axes $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ ainsi que la trajectoire du grêlon. On retrouve une trajectoire bien connue en balistique et en physique des sports, appelée trajectoire de TARTAGLIA, du nom du scientifique italien qui les a étudiées au début du XVII^e siècle, à l'encre et au parchemin ! Celle-ci est présentée figure 13.

56. En l'absence de frottements, quelle trajectoire de grêlons aurait été obtenue ? Comparer cette trajectoire à celle de la courbe de la figure 13. On distinguera deux régimes pour analyser la courbe obtenue par simulation numérique, de part et d'autre du sommet de cette courbe.

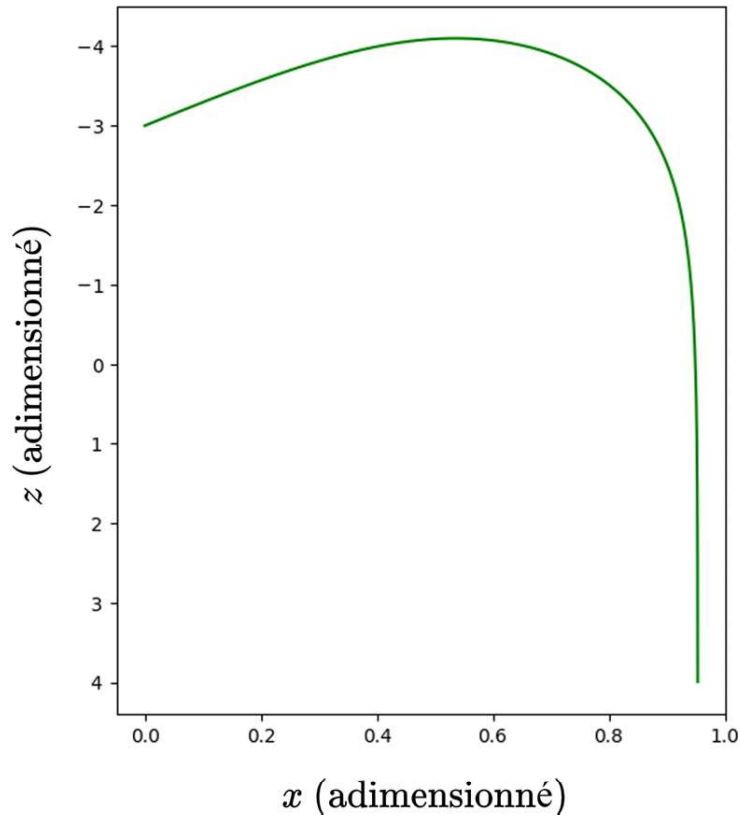


FIGURE 13 – **Résultat de la simulation numérique obtenu.** Le tracé est donné en fonction de grandeurs x et z adimensionnées, de manière à avoir une allure très générale de la trajectoire pour une vitesse initiale non nulle et non verticale.

57. Citer deux phénomènes ou aspects physiques non pris en compte dans la présente étude pouvant influencer la trajectoire des grêlons.

Références :

- La figure 6 provient de la thèse de doctorat de l'université Paris 7-Denis Diderot **Gouttes, films et jets : quand les écoulements modèlent les interfaces.** É. Reyssat. 2007.
- Les figures 7, 8, 9 proviennent de l'article **Shape and instablity of free-falling liquid globules.** É. Reyssat *et al.* 2007 *EPL* **80** 34005.
- La figure 11 est adaptée de l'article **Anisotropic swelling due to hydration constrains anisotropic elasticity in biomaterials fibers.** X.-A. Gouws *et al.* 2024 *JMBBM* **160** 106749.
- La figure 12 provient de l'article **A highly sensitive capacitive-type humidity sensor using customized polyimide film without hydrophobic elements.** Y.-H. Kim *et al.* 2004 *Sens. Mater.* **16** (3) 109-117.

*** FIN DU SUJET ***

