

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
Concours d'admission session 2026
Filière universitaire : Second concours
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

★ ★ ★

L'épreuve se compose d'un exercice et d'un problème qui peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

Exercice

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E .

On considère $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ u = -u \circ f$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que f est également un automorphisme.
En utilisant le déterminant, montrer que n est pair.
2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dim \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \dim \ker(f + \lambda \mathrm{id}_E)$.
(b) En déduire que, si f est diagonalisable, alors son rang est pair.
3. Dans cette question, on suppose que $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{0_E\}$.
(a) Montrer qu'il existe $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une matrice $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
(b) En déduire que le rang de f est pair.

Problème : petites sommes de vecteurs.

Dans ce problème, d et n appartiennent à $\mathbb{N}^*$ et l'on considère n vecteurs $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$.

On cherche à obtenir des « signes » $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que la somme $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j v_j$ ne soit pas trop grande, pour diverses interprétations de cette question.

Les questions préliminaires peuvent être utiles dans la suite. Les autres parties sont logiquement indépendantes les unes des autres.

Introduisons quelques notations concernant l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$:

- pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on notera $\pi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ l'application associant à tout vecteur sa i -ème coordonnée : ainsi, $\pi_1(v_n)$ désignera la première coordonnée du dernier vecteur de notre famille $(v_1, \dots, v_n)$;
- le produit scalaire canonique est défini pour tous $v, w \in \mathbb{R}^d$ par $\langle v | w \rangle = \sum_{i=1}^d \pi_i(v) \pi_i(w)$;
- on notera $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne canonique associée à ce produit scalaire ;
- enfin, on notera $\|\cdot\|_\infty$ la norme définie, pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, par $\|v\|_\infty = \max(|\pi_1(v)|, \dots, |\pi_d(v)|)$.

Préliminaires

1. (a) Montrer que $\forall v \in \mathbb{R}^d, \|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{d} \|v\|_\infty$.
(b) Construire deux vecteurs non nuls v et $w \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|v\|_\infty = \|v\|_2$ et $\|w\|_2 = \sqrt{d} \|w\|_\infty$.
2. (a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}, 2^k k! \leq (2k)!$.
(b) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(\lambda) \leq e^{\lambda^2/2}$.

Partie I. Deux constructions probabilistes

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes et identiquement distribuées, telles que $\mathbb{P}(T_1 = 1) = \mathbb{P}(T_1 = -1) = \frac{1}{2}$.

On note $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ la variable aléatoire définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par $X(\omega) = \sum_{j=1}^n T_j(\omega) v_j$.

3. Norme euclidienne.

(a) Montrer que la variable aléatoire réelle $\|X\|_2^2$ est d'espérance finie et calculer son espérance en fonction de $\|v_1\|_2, \dots, \|v_n\|_2$.

(b) En déduire qu'il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j v_j \right\|_2 \leq \sqrt{n} \max(\|v_1\|_2, \dots, \|v_n\|_2)$.

(c) **Optimalité.** On suppose $n \leq d$. Construire $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ non nuls tels que

$$\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}, \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j v_j \right\|_2 \geq \sqrt{n} \max(\|v_1\|_2, \dots, \|v_n\|_2).$$

4. **Une inégalité de concentration.** Soit $a_1, \dots, a_n \in [-1, 1]$. On pose $Z = \sum_{j=1}^n a_j T_j$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $e^{\lambda Z}$ est d'espérance finie et que $\mathbb{E}[e^{\lambda Z}] \leq \exp\left(n \frac{\lambda^2}{2}\right)$.

(b) Montrer que, pour tous $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(Z > \alpha) \leq \exp\left(n \frac{\lambda^2}{2} - \lambda \alpha\right)$.

(c) En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(|Z| > \alpha) \leq 2e^{-\alpha^2/2n}$.

Dans la suite de cette partie, on travaille avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. On fixe $\alpha > \sqrt{2n \ln(2d)}$.

5. On suppose provisoirement que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\|v_j\|_\infty \leq 1$.

(a) On fixe $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Montrer que $\mathbb{P}(|\pi_i(X)| > \alpha) < \frac{1}{d}$.

(b) Qu'en déduit-on sur l'évènement $(\|X\|_\infty > \alpha)$?

6. Déduire de ce qui précède qu'en général, il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j v_j \right\|_\infty \leq \sqrt{2n \ln(2d)} \max(\|v_1\|_\infty, \dots, \|v_n\|_\infty).$$

Partie II. Le cas général

7. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k , et $\Sigma = V \cap [-1, 1]^n$.

L'objet des deux prochaines questions est de montrer l'existence d'un élément de Σ possédant au moins k coordonnées dans $\{-1, 1\}$.

Comme dans l'espace $\mathbb{R}^d$, on note $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application renvoyant la j -ième coordonnée d'un vecteur, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in \Sigma$ tel que $\forall x' \in \Sigma, \langle x' | y \rangle \leq \langle x | y \rangle$.

(b) Notons $J = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \pi_j(x) \in \{-1, 1\}\}$. Soit $z \in V$ tel que $\forall j \in J, \pi_j(z) = 0$.

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [-\delta, \delta], x + tz \in \Sigma$.

(c) En déduire $\langle y | z \rangle = 0$.

8. On note $\mathcal{P}_{<k}$ l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal strictement inférieur à k .
 Pour tout $J \in \mathcal{P}_{<k}$, on note $V_J = \{z \in V \mid \forall j \in J, \pi_j(z) = 0\}$ et $V_J^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \forall z \in V_J, \langle z|w \rangle = 0\}$.
- (a) On fixe $J \in \mathcal{P}_{<k}$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus V_J^\perp$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$.
- (b) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{J \in \mathcal{P}_{<k}} V_J^\perp$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$.
- (c) Conclure.
9. On retourne aux vecteurs $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$. Montrer que $V = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et en déterminer la dimension en fonction des vecteurs v_j .
10. On fixe une norme quelconque $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j v_j \right\| \leq d \max(\|v_1\|, \dots, \|v_n\|).$$

Partie III. Applications aux séries vectorielles

On munit à nouveau $\mathbb{R}^d$ d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque.

11. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^d$.
 On suppose qu'il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que la série $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k a_k$ converge.
 Montrer que $a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.
12. Construire une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{\varepsilon_k}{\ln(k+2)}$ converge.
13. On admet le résultat suivant, qui renforce un peu celui de la partie précédente, et se démontre de façon semblable.

Théorème (admis). Soit $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$. Alors il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left\| \sum_{j=1}^p \varepsilon_j v_j \right\| \leq 2d \max(\|v_1\|, \dots, \|v_n\|).$$

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ tels que $a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que la série $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k a_k$ converge.

14. **Contre-exemple en dimension infinie.** Construire une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur le segment $[0, 1]$, qui converge uniformément vers 0, mais telle que la série $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k f_k$ ne converge uniformément pour aucune suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$.